

УДК 004.942:378.1

Флегантов Леонід Олексійович

кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри вищої математики, логіки та фізики
Полтавська державна аграрна академія, м. Полтава, Україна
leonid.flegantov@gmail.com

Овсієнко Юлія Іванівна

кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, логіки та фізики
Полтавська державна аграрна академія, м. Полтава, Україна
ovsienkoyulia@online.ua

ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИЙ ПІДХІД У НАВЧАННІ СТУДЕНТІВ АГРАРНИХ ВНЗ ОСНОВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MS EXCEL

Анотація. Розглядається диференційований підхід у навчанні основ математичного моделювання студентів інженерних напрямів підготовки аграрних ВНЗ з використанням інформаційних технологій на прикладі математичної моделі механічного руху тіла у щільному середовищі. Представлена поетапна побудова, удосконалення і дослідження математичної моделі трьох рівнів складності: без урахування опору середовища, з урахуванням опору середовища, з урахуванням ефектів, що виникають внаслідок поступально-обертального руху тіла у щільному середовищі. Даний підхід забезпечує успішне опанування студентами основних понять, методів і процедур математичного моделювання на базовому рівні, формування уявлення про практичне застосування математичних моделей, розвиток первісних навичок науково-дослідницької діяльності.

Ключові слова: математична модель; механічний рух; методика навчання; диференційований підхід; застосування комп'ютерних технологій; навчальний обчислювальний експеримент.

1. ВСТУП

За визначенням З. І Слєпкань: «Диференційований підхід – це особливий підхід викладача до різних груп або до окремих студентів, що полягає в організації з ними на основі різної за змістом, обсягом і складністю (хоч і за одними навчальними програмами) роботи з урахуванням подібних властивостей особистості» [11, с. 68].

Способом реалізації диференційованого підходу (ДП) є диференціація навчання – рівнева і профільна. В умовах вищої школи профільна диференціація здійснюється під час вступу до вишу, вибору спеціалізації. Після цього виникає потреба у рівневій диференціації. Але, звичайно, студентські групи формуються на початку навчання довільно, і з точки зору рівневої диференціації можуть бути однорівневими (гомогенними) або різнорівневими (гетерогенними) залежно від навченості кожного, наукованості (темпу засвоєння знань у навчанні), загального і професійного розвитку [11]. Вирішенню проблеми забезпечення гомогенності студентських академічних груп однорідних за критерієм успішності присвячена авторська методика [15; 16], що була апробована у Полтавській державній аграрній академії у 2009–2010 навчальному році.

Дана стаття присвячена ДП у навчанні основ математичного моделювання студентів інженерних напрямів підготовки вищих аграрних навчальних закладів (ВАНЗ) в умовах рівневої диференціації гетерогенних студентських груп. Диференціація розглядається, як спосіб індивідуалізації навчання в умовах роботи студентської групи [11, с. 68], ДП – як принцип, покладений в основу диференційованого навчання (ДН).

На сьогодні проблема ДН математичних дисциплін у ВНЗ є далекою від остаточного розв'язання. Переважна більшість досліджень, присвячених ДН, ґрунтується на матеріалах середньої школи, і лише окремі з них можна адаптувати до потреб університетів з урахуванням вікових особливостей, статусу студентства, специфіки навчально-виховного процесу і завдань, що ставить суспільство перед вищою освітою. Зокрема, існуючі теоретичні дослідження з питань ДН математичних дисциплін у ВНЗ не відображають усіх особливостей процесу формування математичної складової в структурі підготовки майбутніх фахівців аграрної галузі [7].

Головними чинниками, що перешкоджають реалізації ДН математичних дисциплін у ВНЗ є: відсутність системи науково обґрунтованих цілей і вимог до математичної підготовки студентів-аграріїв, теоретичних і практичних розробок із методики ДН математичних дисциплін майбутніх фахівців-аграріїв; непристосованість існуючих підручників і дидактичних матеріалів із математичних дисциплін до специфіки підготовки фахівців аграрної галузі; одноманітність фонду і недостатня кількість посібників із завданнями прикладного змісту, специфічних для аграрної галузі; відсутність фонду систематизованих математичних завдань з реальними виробничими даними, що містять диференційовані завдання і комплексні задачі, розв'язування яких передбачає застосування специфічних міжпредметних зв'язків, що відображають особливості підготовки майбутніх фахівців у ВНЗ.

Постановка проблеми. Навчання основ математичного моделювання у ВНЗ спирається на результати навчальних досягнень з низки дисциплін, що традиційно є складними для вивчення майбутніми фахівцями аграрного виробництва. Це зумовлено вираженою неоднорідністю рівня знань, відсутністю мотивації до вивчення математичних дисциплін, недостатньою сформованістю алгоритмічного мислення, навичок самостійної навчальної роботи і науково-дослідницької діяльності студентів, їх низькою математичною культурою тощо [8]. Крім того, у багатьох студентів-аграріїв на досить низькому рівні сформовані навички використання інформаційних комп'ютерних технологій (ІКТ), необхідні для розв'язування практичних навчальних завдань. У зв'язку з цим, актуальними завданнями є розробка методичних аспектів навчання студентів ВНЗ основ математичного моделювання з використанням ІКТ, вивчення практичних питань, формування відповідних методик і їх упровадження у навчальний процес.

Отже, проблема, розв'язанню якої присвячене дане дослідження, зумовлена об'єктивно існуючими протиріччями: між вимогами до фахових компетенцій випускників ВНЗ і низьким рівнем математичної підготовки студентів; об'єктивним існуванням індивідуальних психологічних відмінностей і недостатнім їх урахуванням у професійній підготовці фахівців-аграріїв [18]; варіативністю інтересів, нахилів, здібностей студентів і відсутністю особистісної орієнтації змісту й форм організації навчання математичних дисциплін; потребою у реалізації в педагогічній практиці потенціалу ДН основ математичного моделювання і лише частковою розробленістю методичного забезпечення вивчення дисципліни «Основи математичного моделювання» (ОММ) в умовах ДН з використанням ІКТ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дидактичні основи впровадження диференціації й індивідуалізації в навчально-виховний процес розробляли: М. Акімова, Ю. Бабанський, І. Бутузов, В. Дорофєєв, І. Унт, С. Яценко та ін. Методичні аспекти диференційованого формування математичних знань, умінь, навичок (ЗУН) представлені у роботах М. Бурди, В. Забранського, Т. Крилової, О. Коломієць, З. Слєпкань, В. Фірсова, В. Швеця та ін.

Питання підвищення якості підготовки студентів ВНЗ вивчали: І. Бендера, Н. Демешкант, Т. Іщенко, П. Лузан, В. Ільїн та ін. Наразі науково-методичні основи

навчання в умовах його особистісної орієнтації, однією зі складових якого є ДН, досі залишаються поза увагою широкого загалу науковців і методистів.

Питанням ДН вищої математики у ВАНЗ присвячені дослідження Л. Новицької, Ю. Овсієнко, В. Швеця. Залежно від вимог до формування компетенцій майбутнього фахівця, наявних у нього психолого-педагогічних характеристик і передумов, ними виділено три етапи формування умінь дослідницької діяльності майбутніх аграріїв. Кожному з них відповідають певні типи самостійної роботи, в основу класифікації яких покладено ступінь самостійності студентів і рівень їх творчої активності під час виконання навчальних завдань: відтворюючий (репродуктивний), реконструктивний (продуктивний), частково-пошуковий (евристичний) і дослідницький (творчий) [9].

Проблеми навчання основ математичного моделювання тісно пов'язані з питаннями прикладної спрямованості математичних (фундаментальних, природничо-наукових) дисциплін. У цьому напрямку працюють: М. Ігнатенко, Л. Нічуговська, Л. Новицька, А. Прус, С. Семеріков, Л. Соколенко, І. Теплицький, В. Швець.

Методичні засади використання ІКТ під час навчання математичних дисциплін у ВНЗ детально розробляли В. Ключко [6], С. Раков [10], Ю. Триус [13]. Окремим питанням застосування ІКТ у навчальному процесі ВНЗ присвячені праці Н. Морзе, М. Жалдака, С. Семерікова, І. Теплицького [12] та ін.

Сучасна методологія математичного і комп'ютерного моделювання ґрунтується на роботах Б. Гнеденка, В. Глушкова, А. Колмогорова, О. Самарського, А. Тихонова.

Теоретичні і практичні основи застосування математичних моделей у сільському господарстві та агробіології представлені у роботах [3; 17], де враховано специфіку підготовки фахівців аграрного виробництва. Вибрані прикладні питання математичного моделювання в галузі аграрної інженерії розглядаються у посібнику [14]. Дані роботи демонструють важливість і перспективність застосування методів математичного моделювання в аграрній галузі.

У цілому, зважаючи на значну кількість досліджень і публікацій, проблеми ДН основ математичного моделювання у ВАНЗ з використанням ІКТ досі залишаються поза межами комплексного підходу дослідників.

Мета статті. З огляду на це, метою статті є: продемонструвати ДП у навчанні дисципліни ОММ із використанням MS Excel з урахуванням особливостей навчання студентів інженерних напрямів підготовки ВАНЗ.

2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою статті обумовлений вибір методів даного дослідження: аналіз науково-методичної і психолого-педагогічної літератури з проблем ДН та використання ІКТ у математичному моделюванні; аналіз програм навчальних дисциплін, підручників, посібників, що мають зв'язок із дисципліною ОММ у ВАНЗ; моделювання навчальних ситуацій (з'ясування дидактичної структури занять з основ математичного моделювання); узагальнення і систематизація власних результатів впровадження ДП під час навчання основ математичного моделювання у ВАНЗ з використанням ІКТ.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Вивчення навчальної дисципліни ОММ у ВАНЗ здійснюється під час лекційних, лабораторних занять та самостійної роботи студентів. Опанування основ математичного моделювання передбачає наявність у студентів комплексу базових ЗУН, що формуються під час вивчення ними низки дисциплін циклу науково-природничої

(фундаментальної) підготовки. Зокрема, для спеціальності 6.100102 «Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва» це такі дисципліни, як «Вища математика», «Фізика», «Комп'ютери і комп'ютерні технології», а для спеціальності 208 «Агроінженерія» – «Вища математика в інженерній галузі», «Фізика та біофізика».

Навчальна діяльність студентів-аграріїв характеризується неоднорідністю рівня їх математичної культури, недостатньою сформованістю навичок прикладного застосування ІКТ; низькою мотивацією до самостійної навчальної роботи і до вивчення дисциплін, що не є фаховими. Наразі, вивчення дисципліни ОММ є необхідною складовою підготовки фахівців у галузі аграрної інженерії, що забезпечує формування важливих професійних компетенцій майбутніх фахівців (відповідно до Галузевого стандарту вищої освіти України з галузі знань 1001 – «Техніка та енергетика аграрного виробництва» напряму підготовки 6.100102 – «Процеси, машини і обладнання агропромислового виробництва»): вміння прогнозувати технічний стан обладнання, машин і систем; розраховувати експлуатаційні затрати; визначати собівартість продукції, ремонту машин; розраховувати техніко-економічні показники роботи виробничого підрозділу, машинно-транспортного агрегату, технологічного процесу; обґрунтовувати склад машинно-тракторного парку господарства, технологічних комплексів машин і обладнання; оцінювати рівень використання обладнання, виявляти джерела втрат ресурсів і оцінювати їх значимість; розраховувати трудомісткість, кількість і строки технічного обслуговування (ТО) і ремонтів машин, потребу в ресурсах на ТО, діагностику і ремонт техніки, визначати ресурс машин.

ДП у навчанні дисципліні ОММ з використанням ІКТ реалізовано нами під час виконання студентами циклу лабораторних робіт, що полягають у поетапній побудові наскрізних математичних моделей (ММ) кількох рівнів складності, їх комп'ютерній реалізації і дослідженні шляхом навчального обчислювального експерименту. Як засіб комп'ютерної реалізації ММ для студентів першого рівня вищої освіти було обрано електронні таблиці MS Excel, що вивчаються на першому курсі ВАНЗ у дисципліні «Комп'ютери і комп'ютерні технології». Попри це, оскільки реалізація ММ у середовищі MS Excel полягає, фактично, у буквальному відтворенні послідовності необхідних математичних дій засобами електронних таблиць, їх використання сприяє кращому розумінню студентами технічної складової математичного моделювання, забезпечує їм можливість у разі необхідності діагностувати можливі помилки у розрахунках і самостійно удосконалювати ММ, а також створює додаткові дидактичні переваги для викладача, як, наприклад, можливість виявлення й обговорення зі студентами усіх проміжних ефектів і результатів моделювання, що можуть залишатися непомітними (прихованими) під час використання систем комп'ютерної математики таких, як Mathcad або MATLAB, орієнтованих на кінцевий результат.

Метою виконання даних лабораторних робіт є ознайомлення студентів із практикою створення ММ, побудова розрахунково-обчислювальних схем і їх комп'ютерної реалізації; формування навичок проведення обчислювального експерименту й інтерпретація його результатів. Завданнями лабораторних робіт, що розглядаються, є: *створити ММ вільного руху тіла у полі сили тяжіння; знайти її розв'язок і побудувати розрахунковий алгоритм; у середовищі MS Excel реалізувати розрахунково-обчислювальну схему даної ММ; провести комп'ютерний обчислювальний експеримент і сформулювати висновки з нього.*

Основою ММ, що розглядається, є класична модель руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, відома з шкільного курсу фізики. Вона узагальнюється на першому курсі інженерних факультетів ВАНЗ під час вивчення дисципліни «Фізика», використовується у «Вищій математиці» для ілюстрації фізичного змісту розв'язків

диференціальних рівнянь і на другому курсі інженерно-технологічного факультету у дисципліні «Теоретична механіка» під час вивчення неінерціальних сил.

У той же час, дисципліна «Основи математичного моделювання» вивчається на третьому курсі інженерних факультетів ВАНЗ перед тим, як приступити до вивчення більшості дисциплін професійної і практичної підготовки, і на цей час студенти ще не мають можливості вільно оперувати поняттями і прикладами з галузі їх професійного спрямування. Саме тому на прикладі цієї відомої моделі зручно ілюструвати основні поняття й ідеї математичного моделювання з тим, щоб у подальшому використати їх, як основу для побудови більш складних моделей реальних об'єктів, явищ, процесів за фахом майбутніх аграріїв. Зокрема, дану ММ можна взяти за основу для теоретичного вивчення й обґрунтування таких процесів з галузі аграрного виробництва, як: рух крапель молока у молочному сепараторі; рух насіння зернових культур у зерновому сепараторі, під час посіву або вивантаження бункеру зернозбирального комбайну; рух насіння гороху, рису, гречки у луцильному, луцильно-шліфувальному і полірувальному агрегатах; рух коренеплодів картоплі під час їх перевантаження з картоплезбирального комбайну у транспортний агрегат та ін. В усіх цих задачах описання однотипних процесів механічного руху вимагає урахування розмірів тіл, властивостей середовища, механічних сил, що діють на тіло, а також конструктивних особливостей відповідних машин і механізмів, що є предметом вивчення дисциплін професійної і практичної підготовки.

У даній роботі основу ДП нами покладено диференціацію за рівнями складності змісту навчальних задач (табл. 1), обсягом навчальної діяльності і ступенем інтеграції міжпредметних зв'язків, пов'язаних із рівнями ідеалізації ММ (табл. 2), рівнями навчально-пізнавальної мотивації (пізнавального інтересу), самостійності, творчої активності, з урахуванням динамічності даних критеріїв.

Таблиця 1

Диференціація загальної постановки навчальних задач за рівнями складності

| Рівень складності | I | II | III |
|----------------------------|---|--|---|
| Загальна постановка задачі | Побудувати і дослідити ММ, що описує рух фізичного тіла, кинутого під кутом до горизонту, у довільний момент часу | | |
| Диференціація за рівнями | Під час польоту на тіло діє лише сила тяжіння, дією інших сил нехтуємо | На відміну від рівня 1, на тіло діє також сила опору повітря | На відміну від рівня 2, на тіло діє також сила Магнуса [1], що виникає при обертанні тіла |

У процесі розв'язування поставлених навчальних завдань, за рахунок змістової інтерпретації постановки задач і результатів моделювання, на 1-му рівні складності (табл. 1) студент має усвідомити, що ММ, яка описує динаміку тіла в ідеальному випадку, є непридатною для практичного застосування. Але, завдяки її простоті, вона є зручною для попереднього аналізу поведінки об'єкта, явища або процесу, що моделюється. На 2-му рівні складності: студент переконається у тому, що покращена ММ є більш реалістичною, але вимагає подальшого удосконалення; усвідомлює можливі шляхи її покращення, що стимулює його творчу активність, як у напрямку удосконалення ММ, так і її можливого практичного застосування у майбутній професійній діяльності. 3-й рівень складності – творчий: під час проведення обчислювального експерименту, аналізу його результатів і співставлення їх із власним досвідом, студент впевнюється, що одержана ММ є найбільш реалістичною. Це на новому рівні стимулює його пізнавальний інтерес і мотивує до спільного використання методів математичного моделювання і засобів ІКТ у фаховій діяльності.

Диференціація задачі за трьома рівнями складності (табл. 1) передбачає побудову трьох ММ, що відрізняються між собою рівнями ідеалізації (табл. 2). У даній і наступній таблицях, позначка «+» означає, що даний елемент використовується у відповідній ММ.

Таблиця 2

Диференціація за рівнем ідеалізації моделі

| № з/п | Зміст припущення (ідеалізація) | ММ I | ММ II | ММ III |
|-------|---|------|-------|--------|
| 1. | Тіло має сферичну форму | + | + | + |
| 2. | Траєкторія руху тіла лежить у площині, перпендикулярній до поверхні землі | + | + | + |
| 3. | На тіло діє сила тяжіння | + | + | + |
| 4. | На тіло діє сила опору повітря | - | + | + |
| 5. | Тіло обертається навколо його центру у площині руху | - | - | + |
| 6. | На тіло діє сила Магнуса | - | - | + |
| 7. | Дією інших сил нехтуємо | + | + | + |

Відповідно до рівнів ідеалізації (табл. 2), кожній із трьох ММ відповідає індивідуальний набір вхідних параметрів (табл. 3).

Таблиця 3.

Відповідність вхідних параметрів моделей диференціації за рівнями ідеалізації

| № з/п | Параметр і його зміст | ММ I | ММ II | ММ III |
|-------|---|------|-------|--------|
| 1. | g – прискорення вільного падіння (прискорення сили тяжіння), м/с ² | + | + | + |
| 2. | x_0, y_0 – початкові координати центру тіла, м | + | + | + |
| 3. | α_0 – початковий кут до горизонту, під яким кинуте тіло, градуси | + | + | + |
| 4. | v_0 – початкова швидкість руху тіла, м/с | + | + | + |
| 5. | d – діаметр тіла, м | - | + | + |
| 6. | m – маса тіла ($m \neq 0$), кг | - | + | + |
| 7. | ρ – густина щільного середовища (для повітря $\rho = 1,213$ кг/м ³) | - | + | + |
| 8. | C_D – коефіцієнт, що характеризує опір повітря, визначається експериментально, залежить від форми тіла і характеристик середовища (для сфери у повітрі $C_D = 0,47$), б/р | - | + | + |
| 9. | C_L – коефіцієнт, що характеризує ефект Магнуса, визначається експериментально, залежить від форми тіла, якості його поверхні і властивостей середовища (для сфери $0,1 \leq C_L \leq 0,6$), б/р | - | - | + |
| 10. | Напрямок обертання тіла | - | - | + |

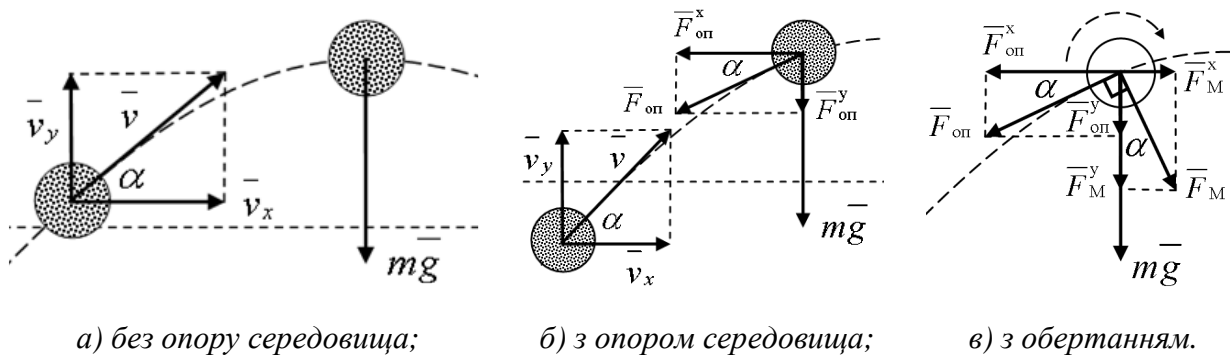
Вихідні параметри однакові для всіх трьох ММ:

$x = x(t)$, $y = y(t)$ – координати центру тіла у довільний момент часу t , м;

$v = v(t)$ – швидкість руху тіла у довільний момент часу t , м/с.

Для аналізу процесу руху тіла і його наступної формалізації відповідно до поставлених задач, студенти мають послідовно розглянути схематичне представлення

руху тіла у трьох варіантах складності (рис. 1), починаючи з найпростішого (рис. 1, а), де α означає кут нахилу траєкторії тіла до горизонту у довільний час t .



а) без опору середовища;

б) з опором середовища;

в) з обертанням.

Рис. 1. Схематичне представлення руху тіла у трьох варіантах складності

На початку побудови ММ слід виконати актуалізацію опорних знань студентів із дисциплін природничо-наукового циклу.

Так, із механіки використовується векторне рівняння траєкторії руху тіла $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у координатній формі [1]:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \quad (1)$$

Механічна інтерпретація похідної функції дозволяє записати рівняння [4]:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad (2)$$

де $v_x = v_x(t)$, $v_y = v_y(t)$ – горизонтальна і вертикальна проекції швидкості руху тіла на вісі координат Ox і Oy відповідно у довільний момент часу t . Тоді $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Диференціальні рівняння (2) містять невідомі функції $x = x(t)$, $y = y(t)$, $v_x = v_x(t)$, $v_y = v_y(t)$. Рівняння для v_x і v_y знайдемо, розглянувши результуючу сил, що діють на тіло для кожного з випадків окремо (рис. 1, а, б, в).

У таблиці (табл. 4) наведено послідовні кроки знаходження рівнянь для кожного з трьох зазначених випадків, при цьому використано такі позначення:

$$\vec{F}_T = m\vec{g} \text{ – сила тяжіння, Н;}$$

$$\vec{F}_{\text{оп}} = -k_2 v^2 \frac{\vec{v}}{v} \text{ – сила опору повітря, Н;}$$

$\vec{F}_M = k_3 v^2$ – сила Магнуса, що виникає внаслідок поступально-обертального руху тіл у щільному середовищі;

$$k_2 = \frac{1}{2} C_D \rho S \text{ – коефіцієнт пропорційності, що характеризує опір повітря, кг/м;}$$

$$k_3 = \frac{1}{2} C_L \rho S \text{ – коефіцієнт пропорційності, що характеризує силу Магнуса, кг/м;}$$

$S = S(t)$ – площа поперечного перерізу тіла, нормального до напрямку руху, м^2 ; у загальному випадку ця площа є функцією часу, але для сфери $S = \pi r^2$, де r – радіус сфери, м ;

У підсумку, до кожної з ММ I-III увійдуть диференціальні рівняння (2), а також відповідні диференціальні рівняння відносно v_x і v_y (табл. 4, крок 7).

Зауважимо, що ММ I складається зі звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку із змінними, що відокремлюються. З вищої математики відомо, що така система диференціальних рівнянь інтегрується аналітично [4]. Аналізуючи одержані ММ, наголошуємо, що при даних основних припущеннях (табл. 1) з ММ I слідує, що траєкторія руху тіла не залежить від його маси і розмірів, а також від властивостей середовища. Детальний алгоритм побудови, відшукування розв'язку, комп'ютерної реалізації і дослідження ММ I у середовищі MS Excel представлено у публікації [2].

Навчальна робота студентів на цьому етапі спрямована на формування навичок дослідницької діяльності репродуктивного (відтворюючого) рівня. Вона організовується під керівництвом викладача, і полягає у виборі ММ, опануванні критеріїв її застосування, інтерпретації розв'язку задачі прикладного змісту з точки зору фахівця-аграрія. Для формування й закріплення умінь дослідницької діяльності під час самостійної роботи необхідною є сформованість у студентів базового рівня математичних знань і практичних навичок із використання ІКТ.

Таблиця 4

Послідовність кроків під час відшукування рівнянь для v_x і v_y

| Кроки | ММ I | ММ II | ММ III |
|-------|---|---|---|
| 1. | $\bar{F} = \bar{F}_T = m\bar{g}$ | $\bar{F} = \bar{F}_T + \bar{F}_{оп}$ | $\bar{F} = \bar{F}_T + \bar{F}_{оп} + \bar{F}_M$ |
| 2. | $\bar{F} = (F_x; F_y),$ $\bar{F}_T = (0; -mg)$ | $\bar{F}_{оп} = (-F_{оп}^x; -F_{оп}^y)$ | $\bar{F}_M = (\pm F_M^x; \mp F_M^y)$ перший знак відповідає обертанню тіла за годинниковою стрілкою, а другий – проти годинникової стрілки |
| 3. | $(F_x; F_y) = (0; -mg)$ | $(F_x; F_y) = (0; -mg) + (-F_{оп}^x; -F_{оп}^y)$ | $(F_x; F_y) = (0; -mg) + (-F_{оп}^x; -F_{оп}^y) + (\pm F_M^x; \mp F_M^y)$ |
| 4. | $F_x = 0, F_y = -mg$ | $F_x = -F_{оп}^x,$ $F_y = -F_{оп}^y - mg$ | $F_x = -F_{оп}^x \pm F_M^x,$ $F_y = -F_{оп}^y - mg \mp F_M^y$ |
| 5. | $F_x = m \frac{dv_x}{dt},$ $F_y = m \frac{dv_y}{dt}$ | $F_{оп}^x = k_2 v_x v_y,$ $F_{оп}^y = k_2 v_x v_y$ | $F_M^x = k_3 v_x v_y$ $F_M^y = k_3 v_x v_y$ |
| 6. | $m \frac{dv_x}{dt} = 0,$ $m \frac{dv_y}{dt} = -mg$ | $m \frac{dv_x}{dt} = -F_{оп}^x,$ $m \frac{dv_y}{dt} = -F_{оп}^y - mg$ | $m \frac{dv_x}{dt} = -F_{оп}^x \pm F_M^x,$ $m \frac{dv_y}{dt} = -F_{оп}^y \mp F_M^y - mg$ |
| 7. | $\frac{dv_x}{dt} = 0,$ $\frac{dv_y}{dt} = -g$ | $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k_2}{m} v_x v_y,$ $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{k_2}{m} v_x v_y - g$ | $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k_2}{m} v_x v_y \pm \frac{k_3}{m} v_x v_y,$ $\frac{dv_y}{dt} = -\frac{k_2}{m} v_x v_y \mp \frac{k_3}{m} v_x v_y - g$ |

ММ II і III також є системами звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку. Останні два з них не належать до типів рівнянь, вивчення яких передбачено у ВАНЗ, їх розв'язок неможливо виразити в елементарних функціях. Такі системи диференціальних рівнянь інтегруються наближено чисельними методами [5]. На відміну від ММ I, у дані рівняння (табл. 4, крок 7) входять діаметр тіла d , маса тіла m і густина середовища ρ . Отже, ці дві ММ дозволяють вивчати відповідно поступальний та поступально-обертальний рух тіла у полі сили тяжіння у щільному середовищі з урахуванням розмірів, маси тіла і щільності середовища.

Робота студентів над ММ II відповідає продуктивному (реконструктивному) рівню навчально-пізнавальної діяльності, особливістю якого є оволодіння студентами експериментальною методикою, необхідною для виконання завдань курсових і дипломних проектів (робіт). У результаті діяльності на цьому етапі у студентів формуються навички на основі відомих математичних методів і алгоритмів, прийомів їх застосування добирати завдання прикладного змісту на побудову ММ з використанням експериментальних даних, їх дослідження, аналіз результатів і прогнозування наслідків. Формування й відпрацювання умінь дослідницької діяльності цього етапу передбачає поєднання аудиторної і позааудиторної форм самостійної роботи, що здійснюється під керівництвом викладача в процесі розв'язування завдань із використанням методичних вказівок, рекомендацій, зразків, які вимагають поглибленого рівня математичної підготовки і вільного володіння ІКТ студентами-аграріями.

Навчальна робота студентів над ММ III має частково-пошуковий (евристичний) характер, відповідає дослідницькому (творчому) рівню. Вона націлена на створення умов для розвитку навичок позааудиторної, самостійної науково-дослідницької діяльності студентів-магістрантів (аспірантів), фахівців-аграріїв, і має пошуковий (евристичний) характер. Завдання цього етапу полягають у закріпленні й удосконаленні навичок застосування методів математичного моделювання з використанням ІКТ. Їх реалізація передбачає наявність високого рівня сформованості навичок дослідницької діяльності, спирається на знання поглибленого рівня з вищої математики і практичного використання ІКТ.

Наступним навчальним завданням після побудови ММ є їх комп'ютерна реалізація у середовищі MS Excel. Розрахунково-обчислювальна схема комп'ютерної реалізації ММ I одержується безпосередньо з її аналітичного розв'язку [2]. З нього, зокрема, слідує, що рух тіла у напрямку осі Ox відбувається зі сталою швидкістю, тобто у випадку відсутності опору повітря він є рівномірним. Рух тіла у напрямку осі Oy є рівноприскореним.

Для моделей II і III у найпростішому випадку розрахунково-обчислювальна схема будується на основі чисельного методу Ейлера [5]. Відмічаємо, що завдяки урахуванню опору середовища й ефектам, пов'язаним з обертанням, рух тіла, як у напрямку вісі Ox , так і у напрямку осі Oy є прискореним.

Розрахунково-обчислювальні схеми ММ I–III подано у таблиці (табл. 5), де позначено:

i – номери спостережень положення тіла (точок фіксації);

$\Delta t = \frac{t_M}{n}$ – проміжок часу між моментами спостереження; t_M – час моделювання

(час, протягом якого спостерігається рух тіла); n – кількість точок фіксації положення тіла;

$t_i = i \cdot \Delta t, t_i \in [0; t_M], i = \overline{0, n}$ – моменти спостереження положення тіла;
 $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i)$ – координати центру тіла в момент часу t_i ;
 $v_{xi} = v_x(t_i), v_{yi} = v_y(t_i)$ – компоненти швидкості тіла в момент часу t_i ;
 $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0, v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$ – компоненти початкової швидкості тіла v_0 ;
 $v_i = \sqrt{v_{xi}^2 + v_{yi}^2}$ – швидкість тіла у момент часу t_i .

На малюнку (рис. 2) представлені вихідні дані ММ динаміки поступально-обертального руху тіла у щільному середовищі, реалізованої у середовищі MS Excel. Для введення вхідних параметрів ММ утворені окремі блоки, позначені цифрами 1–4.

Таблиця 5

Розрахунково-обчислювальні схеми ММ

| ММ I | ММ II | ММ III |
|--|--|--|
| $\begin{cases} v_{xi} = v_{0x} \\ v_{yi} = v_{0y} - gt_i \\ x_i = x_0 + v_{0x} \cdot t_i \\ y_i = y_0 + v_{0y} \cdot t_i - \frac{gt_i^2}{2} \end{cases}$ | $\begin{cases} v_{xi+1} = v_{xi} + (-\frac{k_2}{m} v_{xi} v_i) \Delta t \\ v_{yi+1} = v_{yi} + (-\frac{k_2}{m} v_{yi} v_i - g) \Delta t \\ x_{i+1} = x_i + v_{xi} \Delta t \\ y_{i+1} = y_i + v_{yi} \Delta t \end{cases}$ | $\begin{cases} v_{xi+1} = v_{xi} + (-\frac{k_2}{m} v_{xi} v_i \pm \frac{k_3}{m} v_{yi} v_i) \Delta t \\ v_{yi+1} = v_{yi} + (-\frac{k_2}{m} v_{yi} v_i \mp \frac{k_3}{m} v_{xi} v_i - g) \Delta t \\ x_{i+1} = x_i + v_{xi} \Delta t \\ y_{i+1} = y_i + v_{yi} \Delta t \end{cases}$ |

Блок 1 містить вхідні дані, що є спільними для ММ I–III (табл. 3, 1–4). У комірках B9, B10 (рис. 2) розраховуються v_{0x} і v_{0y} за формулами: =B8*COS(РАДИАНЫ(B7)) і =B8*SIN(РАДИАНЫ(B7)).

Блок даних 2 (рис. 2) також використовується у ММ I–III. Він призначений для завдання часу моделювання і містить розрахунок кроку моделювання Δt , що у даному випадку дорівнює $0,01 \cdot t_M$: у B15 введена формула =(B14-B13)/100.

| | A | B | C | D | E | F |
|----|---|-----------------------|---|-------------------------------|-------------------------|---|
| 1 | Модель динаміки поступально-обертального руху тіла | | | | | |
| 2 | у щільному середовищі | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | g= | 9,81 м/с ² | 1 | d= | 0,24 м | 3 |
| 5 | x0= | 0 м | | m= | 0,68 кг | |
| 6 | y0= | 1,75 м | | Cd= | 0,47 | |
| 7 | alpha0= | 45 градуси | | rho= | 1,213 кг/м ³ | |
| 8 | v0= | 8,8 м/с | | S= | 0,045239 м ² | |
| 9 | v0x= | 6,22254 м/с | | k2= | 0,012896 кг/м | |
| 10 | v0y= | 6,22254 м/с | | k2/m= | 0,018964 1/м | |
| 11 | | | 2 | CL= | 0,35 | 4 |
| 12 | Час моделювання: | | | Напрямок швидкості обертання: | | |
| 13 | початок | 0 с | | | ↑ | |
| 14 | кінець | 1,8 с | | k3= | 0,009603 кг/м | |
| 15 | deltaT= | 0,018 с | | k3/m= | 0,014122 1/м | |

Рис. 2. Вихідні дані ММ на робочому аркуші MS Excel

Блоки вихідних даних 1 і 2 утворюються студентом у виконанні комп'ютерної реалізації ММ I. Після них студент самостійно будує таблицю для реалізації розрахунково-обчислювальної схеми ММ I (рис. 3) і виконує розрахунки (рис. 4).

| A | B | C | D | E | F | G | |
|-----|-----|-------------------|----------|------------------|------------------------|-----------------|--------------------------------|
| 17 | i | ti, с | vxi, м/с | vyi, м/с | vi, м/с | xi, м | yi, м |
| 18 | 0 | =B\$13+A18*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B18 | =КОРЕНЬ(C18^2+D18^2) | =B\$5+B\$9*B18 | =B\$6+B\$10*B18-B\$4*B18^2/2 |
| 19 | 1 | =B\$13+A19*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B19 | =КОРЕНЬ(C19^2+D19^2) | =B\$5+B\$9*B19 | =B\$6+B\$10*B19-B\$4*B19^2/2 |
| 20 | 2 | =B\$13+A20*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B20 | =КОРЕНЬ(C20^2+D20^2) | =B\$5+B\$9*B20 | =B\$6+B\$10*B20-B\$4*B20^2/2 |
| 21 | 3 | =B\$13+A21*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B21 | =КОРЕНЬ(C21^2+D21^2) | =B\$5+B\$9*B21 | =B\$6+B\$10*B21-B\$4*B21^2/2 |
| 22 | 4 | =B\$13+A22*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B22 | =КОРЕНЬ(C22^2+D22^2) | =B\$5+B\$9*B22 | =B\$6+B\$10*B22-B\$4*B22^2/2 |
| 23 | 5 | =B\$13+A23*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B23 | =КОРЕНЬ(C23^2+D23^2) | =B\$5+B\$9*B23 | =B\$6+B\$10*B23-B\$4*B23^2/2 |
| 113 | 95 | =B\$13+A113*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B113 | =КОРЕНЬ(C113^2+D113^2) | =B\$5+B\$9*B113 | =B\$6+B\$10*B113-B\$4*B113^2/2 |
| 114 | 96 | =B\$13+A114*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B114 | =КОРЕНЬ(C114^2+D114^2) | =B\$5+B\$9*B114 | =B\$6+B\$10*B114-B\$4*B114^2/2 |
| 115 | 97 | =B\$13+A115*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B115 | =КОРЕНЬ(C115^2+D115^2) | =B\$5+B\$9*B115 | =B\$6+B\$10*B115-B\$4*B115^2/2 |
| 116 | 98 | =B\$13+A116*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B116 | =КОРЕНЬ(C116^2+D116^2) | =B\$5+B\$9*B116 | =B\$6+B\$10*B116-B\$4*B116^2/2 |
| 117 | 99 | =B\$13+A117*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B117 | =КОРЕНЬ(C117^2+D117^2) | =B\$5+B\$9*B117 | =B\$6+B\$10*B117-B\$4*B117^2/2 |
| 118 | 100 | =B\$13+A118*B\$15 | =B\$9 | =B\$10-B\$4*B118 | =КОРЕНЬ(C118^2+D118^2) | =B\$5+B\$9*B118 | =B\$6+B\$10*B118-B\$4*B118^2/2 |

Рис. 3. Комп'ютерна реалізація розрахунково-обчислювальної схеми ММ

На наступному малюнку (рис. 4) представлені результати розрахунків, виконаних згідно ММ I на основі вхідних даних, наведених вище (рис. 2, блоки 1–2).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|-----|-----|-------|----------|----------|---------|----------|----------|
| 17 | i | ti, с | vxi, м/с | vyi, м/с | vi, м/с | xi, м | yi, м |
| 18 | 0 | 0 | 6,22254 | 6,22254 | 8,8000 | 0,00000 | 1,75 |
| 19 | 1 | 0,018 | 6,22254 | 6,04596 | 8,6760 | 0,11201 | 1,860416 |
| 20 | 2 | 0,036 | 6,22254 | 5,86938 | 8,5539 | 0,22401 | 1,967655 |
| 21 | 3 | 0,054 | 6,22254 | 5,6928 | 8,4337 | 0,33602 | 2,071714 |
| 22 | 4 | 0,072 | 6,22254 | 5,51622 | 8,3156 | 0,44802 | 2,172595 |
| 23 | 5 | 0,09 | 6,22254 | 5,33964 | 8,1995 | 0,56003 | 2,270298 |
| 113 | 95 | 1,71 | 6,22254 | -10,5526 | 12,2506 | 10,64054 | -1,95217 |
| 114 | 96 | 1,728 | 6,22254 | -10,7291 | 12,4030 | 10,75255 | -2,1437 |
| 115 | 97 | 1,746 | 6,22254 | -10,9057 | 12,5561 | 10,86455 | -2,33842 |
| 116 | 98 | 1,764 | 6,22254 | -11,0823 | 12,7097 | 10,97656 | -2,53631 |
| 117 | 99 | 1,782 | 6,22254 | -11,2589 | 12,8640 | 11,08857 | -2,73738 |
| 118 | 100 | 1,8 | 6,22254 | -11,4355 | 13,0188 | 11,20057 | -2,94163 |

Рис. 4. Результати розрахунків динаміки руху тіла згідно моделі I.

Для комп'ютерної реалізації ММ II, розрахунок (рис. 3, 4), удосконалюється: додається блок 3 (рис. 2), що містить додаткові вхідні параметри ММ II (табл. 3, 5–8). У комірках E8, E9, E10 блоку 3 виконуються допоміжні розрахунки, що використовуються у ММ II (табл. 5), за формулами, відповідно: =ПИ()* (E4/2)^2, =E6*E7*E8/2, =E9/E5.

| A | B | C | D | E | F | G | |
|-----|-----|--------------------------------------|-------------------------------------|----------|------------------|------------------|-------|
| 17 | i | ti, с | vxi, м/с | vyi, м/с | vi, м/с | xi, м | yi, м |
| 18 | 0 | =B\$13 | =B\$9 | =B\$10 | =КОРЕНЬ | =B\$5 | =B\$6 |
| 19 | 1 | =B\$13=C18+(-E\$10*C18^E18)*B\$15 | =D18+(-E\$10*D18^E18-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F18+C18*B\$15 | =G18+D18*B\$15 | |
| 20 | 2 | =B\$13=C19+(-E\$10*C19^E19)*B\$15 | =D19+(-E\$10*D19^E19-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F19+C19*B\$15 | =G19+D19*B\$15 | |
| 21 | 3 | =B\$13=C20+(-E\$10*C20^E20)*B\$15 | =D20+(-E\$10*D20^E20-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F20+C20*B\$15 | =G20+D20*B\$15 | |
| 22 | 4 | =B\$13=C21+(-E\$10*C21^E21)*B\$15 | =D21+(-E\$10*D21^E21-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F21+C21*B\$15 | =G21+D21*B\$15 | |
| 23 | 5 | =B\$13=C22+(-E\$10*C22^E22)*B\$15 | =D22+(-E\$10*D22^E22-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F22+C22*B\$15 | =G22+D22*B\$15 | |
| 113 | 95 | =B\$13=C112+(-E\$10*C112^E112)*B\$15 | =D112+(-E\$10*D112^E112-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F112+C112*B\$15 | =G112+D112*B\$15 | |
| 114 | 96 | =B\$13=C113+(-E\$10*C113^E113)*B\$15 | =D113+(-E\$10*D113^E113-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F113+C113*B\$15 | =G113+D113*B\$15 | |
| 115 | 97 | =B\$13=C114+(-E\$10*C114^E114)*B\$15 | =D114+(-E\$10*D114^E114-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F114+C114*B\$15 | =G114+D114*B\$15 | |
| 116 | 98 | =B\$13=C115+(-E\$10*C115^E115)*B\$15 | =D115+(-E\$10*D115^E115-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F115+C115*B\$15 | =G115+D115*B\$15 | |
| 117 | 99 | =B\$13=C116+(-E\$10*C116^E116)*B\$15 | =D116+(-E\$10*D116^E116-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F116+C116*B\$15 | =G116+D116*B\$15 | |
| 118 | 100 | =B\$13=C117+(-E\$10*C117^E117)*B\$15 | =D117+(-E\$10*D117^E117-B\$4)*B\$15 | =КОРЕНЬ | =F117+C117*B\$15 | =G117+D117*B\$15 | |

Рис. 5. Комп'ютерна реалізація розрахунково-обчислювальної схеми моделі II

Розрахункова таблиця ММ II одержується на основі відповідної таблиці, побудованої для ММ I (рис. 3), у яку необхідно внести зміни згідно розрахунково-обчислювальної схеми ММ II, а саме: замінити формули у стовпцях C, D, F і G згідно обчислювального алгоритму методу Ейлера (рис. 5).

На рис. 6 подано результати розрахунку динаміки тіла у щільному середовищі згідно ММ II на основі вхідних даних, представлених на рис. 2 (блоки 1–3).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|-----|-----|-------|-----------|-----------|---------|---------|-----------|
| 17 | i | ti, c | vxi, м/с | vyi, м/с | vi, м/с | xi, м | yi, м |
| 18 | 0 | 0 | 6,2225397 | 6,2225397 | 8,8000 | 0,00000 | 1,75 |
| 19 | 1 | 0,018 | 6,2038477 | 6,0272677 | 8,6496 | 0,11201 | 1,8620057 |
| 20 | 2 | 0,036 | 6,1855304 | 5,8328917 | 8,5020 | 0,22367 | 1,9704965 |
| 21 | 3 | 0,054 | 6,1675789 | 5,6393837 | 8,3571 | 0,33501 | 2,0754886 |
| 22 | 4 | 0,072 | 6,1499844 | 5,446716 | 8,2152 | 0,44603 | 2,1769975 |
| 23 | 5 | 0,09 | 6,1327381 | 5,2548619 | 8,0761 | 0,55673 | 2,2750384 |
| 113 | 95 | 1,71 | 4,8851105 | -9,905051 | 11,0442 | 9,53916 | -1,919651 |
| 114 | 96 | 1,728 | 4,8666938 | -10,04429 | 11,1612 | 9,62710 | -2,097942 |
| 115 | 97 | 1,746 | 4,8481521 | -10,1826 | 11,2779 | 9,71470 | -2,278739 |
| 116 | 98 | 1,764 | 4,829488 | -10,31998 | 11,3941 | 9,80196 | -2,462026 |
| 117 | 99 | 1,782 | 4,810704 | -10,45642 | 11,5100 | 9,88889 | -2,647785 |
| 118 | 100 | 1,8 | 4,7918029 | -10,59192 | 11,6254 | 9,97549 | -2,836001 |

Рис. 6. Результати розрахунку динаміки тіла у щільному середовищі згідно моделі II.

Перехід до комп'ютерної реалізації ММ III полягає в удосконаленні попередньої розрахункової таблиці (рис. 5). Відмінність ММ III полягає у можливості моделювання обертання тіла у різних напрямках: для введення відповідних вхідних даних (табл. 3, 7–10) створюється блок 4 (рис. 2). У комірку E13 вводиться спеціальний коефіцієнт, що регулює параметри обертання, рівний відношенню лінійної швидкості обертання тіла до швидкості його поступального руху: його додатне значення задає напрям обертання за годинниковою стрілкою, від'ємне – проти годинникової стрілки, значення 0 – означає відсутність обертання. Попри це, у комірках E14 і E15 виконуються допоміжні розрахунки за формулами, відповідно: $=E13*E11*E7*E8/2$, $=E14/E5$.

Розрахункова таблиця ММ III будується на основі відповідної таблиці ММ II (рис. 5), де необхідно внести зміни згідно розрахунково-обчислювальної схеми ММ III (табл. 5), як показано на малюнку (рис. 7). Порівняно з рис. 4, тут зміни внесено лише у стовпці C і D.

| A | B | C | D | E | F | G |
|-----|-----|--|---|----------------|---------|-------------|
| 17 | i | ti, c | vxi, м/с | vyi, м/с | vi, м/с | xi, м yi, м |
| 18 | 0 | =B9 | =B9 | =B10 | =KOPE | =B9 |
| 19 | 1 | =B=C18+(-\$E\$10*C18*E18+\$E\$15*D18*E18)*\$B\$15 | =D18+(-\$E\$10*D18*E18-\$E\$15*C18*E18-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F18+G18 | | |
| 20 | 2 | =B=C19+(-\$E\$10*C19*E19+\$E\$15*D19*E19)*\$B\$15 | =D19+(-\$E\$10*D19*E19-\$E\$15*C19*E19-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F19+G19 | | |
| 21 | 3 | =B=C20+(-\$E\$10*C20*E20+\$E\$15*D20*E20)*\$B\$15 | =D20+(-\$E\$10*D20*E20-\$E\$15*C20*E20-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F20+G20 | | |
| 22 | 4 | =B=C21+(-\$E\$10*C21*E21+\$E\$15*D21*E21)*\$B\$15 | =D21+(-\$E\$10*D21*E21-\$E\$15*C21*E21-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F21+G21 | | |
| 23 | 5 | =B=C22+(-\$E\$10*C22*E22+\$E\$15*D22*E22)*\$B\$15 | =D22+(-\$E\$10*D22*E22-\$E\$15*C22*E22-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F22+G22 | | |
| 113 | 95 | =B=C112+(-\$E\$10*C112*E112+\$E\$15*D112*E112)*\$B\$15 | =D112+(-\$E\$10*D112*E112-\$E\$15*C112*E112-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F112+G11 | | |
| 114 | 96 | =B=C113+(-\$E\$10*C113*E113+\$E\$15*D113*E113)*\$B\$15 | =D113+(-\$E\$10*D113*E113-\$E\$15*C113*E113-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F113+G11 | | |
| 115 | 97 | =B=C114+(-\$E\$10*C114*E114+\$E\$15*D114*E114)*\$B\$15 | =D114+(-\$E\$10*D114*E114-\$E\$15*C114*E114-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F114+G11 | | |
| 116 | 98 | =B=C115+(-\$E\$10*C115*E115+\$E\$15*D115*E115)*\$B\$15 | =D115+(-\$E\$10*D115*E115-\$E\$15*C115*E115-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F115+G11 | | |
| 117 | 99 | =B=C116+(-\$E\$10*C116*E116+\$E\$15*D116*E116)*\$B\$15 | =D116+(-\$E\$10*D116*E116-\$E\$15*C116*E116-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F116+G11 | | |
| 118 | 100 | =B=C117+(-\$E\$10*C117*E117+\$E\$15*D117*E117)*\$B\$15 | =D117+(-\$E\$10*D117*E117-\$E\$15*C117*E117-\$B\$4)*\$B\$15 | =KOPE=F117+G11 | | |

Рис. 7. Комп'ютерна реалізація розрахунково-обчислювальної схеми моделі III

Розрахунки, представлені на малюнку (рис. 8), виконані на основі вхідних даних, представлених на малюнку (рис. 2, блоки 1–4).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|-----|-----|-------|----------|----------|---------|---------|----------|
| 17 | i | ti, c | vxi, м/с | vyi, м/с | vi, м/с | xi, м | yi, м |
| 18 | 0 | 0 | 6,22254 | 6,22254 | 8,8000 | 0,00000 | 1,75 |
| 19 | 1 | 0,018 | 6,217767 | 6,013348 | 8,6499 | 0,11201 | 1,862006 |
| 20 | 2 | 0,036 | 6,21263 | 5,805341 | 8,5029 | 0,22393 | 1,970246 |
| 21 | 3 | 0,054 | 6,207146 | 5,598483 | 8,3589 | 0,33575 | 2,074742 |
| 22 | 4 | 0,072 | 6,201331 | 5,392739 | 8,2182 | 0,44748 | 2,175515 |
| 23 | 5 | 0,09 | 6,1952 | 5,188076 | 8,0806 | 0,55911 | 2,272584 |
| 113 | 95 | 1,71 | 4,241734 | -10,7597 | 11,5656 | 9,52935 | -2,69506 |
| 114 | 96 | 1,728 | 4,193354 | -10,9063 | 11,6846 | 9,60570 | -2,88873 |
| 115 | 97 | 1,746 | 4,144235 | -11,0518 | 11,8033 | 9,68118 | -3,08504 |
| 116 | 98 | 1,764 | 4,094377 | -11,1963 | 11,9214 | 9,75577 | -3,28398 |
| 117 | 99 | 1,782 | 4,043786 | -11,3397 | 12,0392 | 9,82947 | -3,48551 |
| 118 | 100 | 1,8 | 3,992464 | -11,4821 | 12,1564 | 9,90226 | -3,68962 |

Рис. 8. Результати розрахунку динаміки тіла у щільному середовищі згідно моделі III

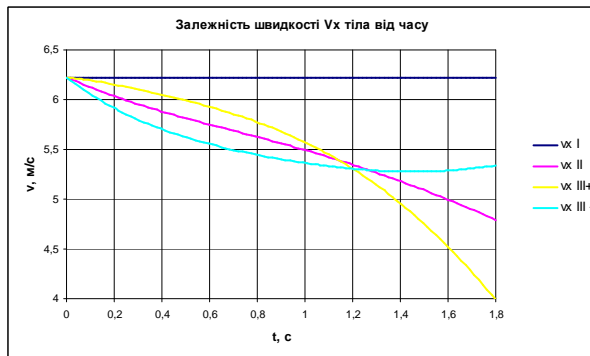


Рис. 9. Горизонтальні складові швидкості поступального руху тіла для ММ I–III

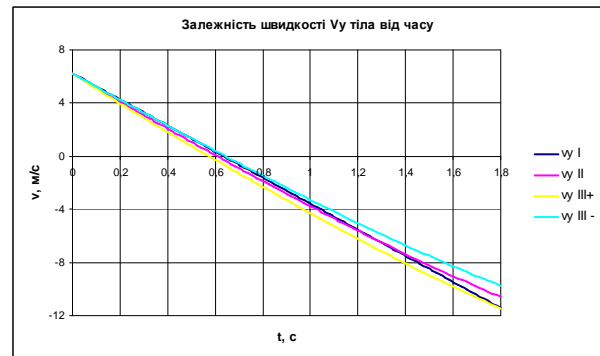


Рис. 10. Вертикальні складові швидкості поступального руху тіла для ММ I–III

Результати розрахунків, виконаних згідно ММ I–III (рис. 4, 6, 8), для візуального порівняння доцільно представити у вигляді графіків (рис. 9–12). Графіки, позначені ММ III+ і ММ III – описують випадки обертання тіла за годинниковою стрілкою (рис. 1, в) – проти годинникової стрілки відповідно.

На заключному етапі, на основі побудованих ММ I–III, відповідно до мети лабораторної роботи, студенти виконують комп’ютерний обчислювальний експеримент. За його умовами, необхідно повернутися до початкових значень вхідних параметрів моделі (рис. 2) і, при фіксованому початковому куті $\alpha_0 = 45^\circ$, експериментальним шляхом визначити швидкість v_0 , при якій траєкторія тіла проходить через точку із заданими координатами.

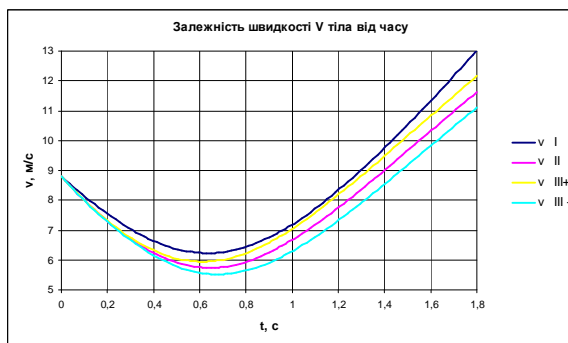


Рис. 11. Швидкості поступального руху тіла згідно ММ I–III

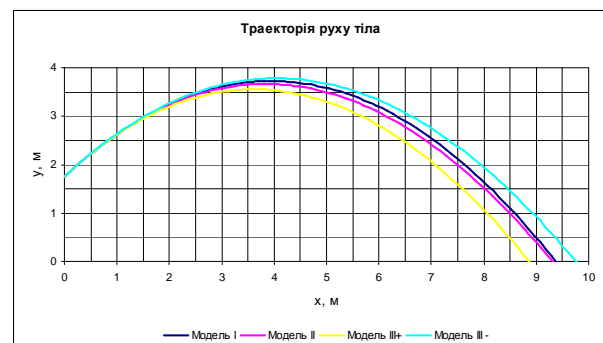


Рис. 12. Траєкторія руху тіла для ММ I–III

У стовпцях 6–9 (табл. 6) представлені результати розрахунків, виконаних для цільової точки з координатами (6,25; 3,05) (що відповідає розташуванню початкової точки траєкторії руху тіла на 3-очковій лінії біля баскетбольного кошика).

Таблиця 6

Обчислювальний експеримент

| № експерименту | Місце випробування | g , м/с ² | d , см | ρ , кг/м ³ | v_0 , м/с | | | |
|----------------|--------------------|------------------------|----------|----------------------------|-------------|-----------|------------|------|
| | | | | | Модель I | Модель II | Модель III | |
| | | | | | | | Обертання | |
| | | | | | | +1 | -1 | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | Поверхня Землі | 9,81 | 24 | 1,213 | 8,8 | 9,2 | 9,4 | 9,0 |
| 2 | Екватор Землі | 9,78 | 24 | 1,213 | 8,8 | 9,2 | 9,4 | 9,0 |
| 3 | Полюси Землі | 9,83 | 24 | 1,213 | 8,8 | 9,2 | 9,4 | 9,0 |
| 4 | Місяць | 1,62 | 24 | 0,000 | 3,6 | 3,6 | 3,6 | 3,6 |
| 5 | Сонце | 273,1 | 24 | 10 ⁻⁶ | 46,5 | 46 | 46 | 46 |
| 6 | Меркурій | 3,70 | 24 | 0,000 | 5,4 | 5,4 | 5,4 | 5,4 |
| 7 | Венера | 8,88 | 2,4 * | 71,43 | 8,4 | 8,6 | 8,7 | 8,4 |
| 8 | Марс | 3,86 | 24 | 0,020 | 5,5 | 5,5 | 5,5 | 5,5 |
| 9 | Церера | 0,27 | 24 | 0,000 | 1,46 | 1,46 | 1,46 | 1,46 |
| 10 | Юпітер | 23,95 | 24 | 0,290 | 13,7 | 14 | 14 | 13,8 |
| 11 | Сатурн | 10,44 | 24 | 0,687 | 9,1 | 9,3 | 9,4 | 9,2 |
| 12 | Уран | 8,86 | 24 | 1,270 | 8,4 | 8,8 | 9,0 | 8,7 |
| 13 | Нептун | 11,09 | 24 | 1,638 | 9,35 | 10 | 10,2 | 9,8 |
| 14 | Плутон | 0,61 | 24 | 0,000 | 2,2 | 2,2 | 2,2 | 2,2 |

(*) Щільність середовища ρ дуже велика, тому для зменшення сили опору обираємо тіло меншого розміру.

У наведених розрахунках (табл. 6) значення діаметра тіла d і його маси m взято для стандартного баскетбольного м'яча (рис. 2, блок 3). Значення параметрів моделі g і ρ , розміщених у стовпцях 3 і 5 (табл. 6), студентам пропонується самостійно знайти в Інтернеті.

Важливим обов'язковим заключним етапом виконання студентами лабораторних робіт із дисципліни ОММ є аналіз одержаних числових розрахунків і графіків, формулювання змістовних висновків і узагальнення підсумків.

Слід наголосити, що ММ, розглянута у даній роботі, незважаючи на її простоту, має доволі загальний характер, і може бути в подальшому адаптована для дослідження багатьох процесів у галузі аграрної інженерії, галузевого машинобудування тощо. Одним із характерних прикладів може служити неоднорідне рідке середовище (суспензія дріжджів), що піддається впливу відцентрового і гравітаційного полів у тарілчастому сепараторі. Потік суспензії проходить під напором через сепаратор, що має розподільчу решітку у вигляді ряду паралельних шарів, які труться один об одного з різними послідовно зростаючими швидкостями. Різниця між швидкостями руху сусідніх решіток створює відносну кутову швидкість частинок суспензії понад 5000 рад/с. У результаті частинки вищої фракції приводяться в обертальний рух: швидкість течії граничного шару рідини, що обтікає частку знизу, уповільнюється, а згори – прискорюється. Різниця швидкостей викликає різницю сил тиску, що діє на частинки у поперечному напрямку знизу (з боку повільних шарів рідини) вгору (до області вищих швидкостей).

4. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

1. У статті розглянута практична реалізація ДП у навчанні дисципліни ОММ з використанням MS Excel для студентів інженерних напрямів підготовки ВАНЗ на прикладі побудови і дослідження наскрізної ММ трьох рівнів складності.

2. Як критерії диференціації були обрані: складність змісту навчальних задач; обсяг навчальної діяльності студентів; ступінь інтеграції міжпредметних зв'язків, пов'язаних із рівнями ідеалізації моделей; рівні навчально-пізнавальної мотивації, самостійності і творчої активності студентів.

3. На 1-му рівні складності під час побудови ММ I студенти набувають базових навичок з основ математичного моделювання.

4. Одержані під час побудови ММ I результати і висновки мотивують студентів до побудови ММ II (2-й рівень складності). На цьому етапі: закріплюються одержані вище навички; студенти переконуються у перевагах ММ II і в можливості її подальшого удосконалення; цей висновок мотивує їх творчу активність, і в процесі дослідження ММ II студенти, як правило, генерують ідеї щодо покращення ММ та її практичного використання.

5. Навчальна діяльність студентів на 3-му рівні складності має творчий характер. Це пояснюємо тим, що: на даному етапі у студентів в цілому сформоване розуміння основних принципів і базові навички з основ математичного моделювання; вищий рівень пізнавального інтересу, мотивація до навчальної діяльності; з'являється впевненість у власних силах і здатність до самостійної навчальної роботи; проявляється творчий підхід до розв'язування навчальних проблем, що ґрунтується на усвідомленні прикладної спрямованості навчального матеріалу і його зв'язку з майбутньою спеціальністю. Підсумком цього етапу є сформовані в цілому навички проведення обчислювального експерименту з використанням математичної моделі й уміння інтерпретувати його результати, мотивація до застосування методів математичного моделювання у поєднанні із засобами ІКТ у майбутній фаховій діяльності.

6. Розглянутий ДП у навчанні студентів ВАНЗ основ математичного моделювання з використанням MS Excel надає можливість урахувати психолого-педагогічні особливості навчальної діяльності студентів інженерних напрямів підготовки ВАНЗ, і за рахунок цього забезпечити відповідну складову формування їх професійної компетентності.

7. Перспективним напрямком подальших досліджень є використання даного підходу під час математичного моделювання об'єктів, явищ і процесів, пов'язаних безпосередньо з технологіями аграрного виробництва.

8. Альтернативою використанню електронних таблиць MS Excel для комп'ютерної реалізації розглянутої ММ, є застосування систем комп'ютерної математики Mathcad, Matlab, Mathematica або інших, що, на нашу думку, є більш доцільним на другому ступені вищої освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алешкевич В. А. Курс общей физики. Механика / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев ; под ред. В. А. Алешкевича. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 472 с.
2. Горда І. М. Комп'ютерне моделювання процесу механічного руху тіла засобами MS Excel [Електронний ресурс] / І. М. Горда, Л. О. Флегантов // Інформаційні технології і засоби навчання / Ін-т інформ. технологій і засобів навчання НАПН України, Ун-т менеджменту освіти НАПН України; гол. ред.: В. Ю. Биков. — 2015. — № 3 (47). — Режим доступу : <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1245>.

3. Гроссман С. Математика для биологов / С. Гроссман, Дж. Тернер ; пер. с англ., предисл. и коммент. Ю. М. Свиржева. – М. : Высш. шк., 1983. – 383 с.
4. Дубовик В. П. Вища математика : [навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак.] / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – 4-те вид. — К. : Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
5. Калиткин Н. Н. Численные методы : в 2 кн. / Н. Н. Калиткин, П. В. Корякин. – Кн. 2. Методы математической физики. – М. : Академия, 2013. – 304 с.
6. Клочко В. І. Вища математика. Звичайні диференціальні рівняння (з комп'ютерною підтримкою) : [навчальний посібник] / В. І. Клочко, З. В. Бондаренко. – Вінниця, 2013. – 248 с.
7. Овсієнко Ю. І. Диференційоване навчання: витоки, аналіз досвіду, перспективи / Ю. І. Овсієнко // Вісник Черкаського університету. Серія «Педагогічні науки». – 2007. – Вип. 104. – С. 82–92.
8. Овсієнко Ю. І. Дослідження рівня знань з математики студентів аграрних вищих навчальних закладів / Ю. І. Овсієнко // Наука і сучасність : зб. наук. пр. Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. – Т. 52. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. – С. 66–80.
9. Овсієнко Ю. І. Формування засобами математики у студентів вищих навчальних закладів освіти аграрного профілю умінь дослідницької діяльності / Ю. І. Овсієнко // Вища освіта України. – 2012. – № 3. — Тематичний вип. «Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології» [дод. 1]. – Т. 3. – С. 89–99.
10. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ : [монографія] / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.
11. Слєпкань З. І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі : [навч. посіб.] / З. І. Слєпкань. — К. : Вища шк., 2005. – 239 с.
12. Теплицький І. О. Комп'ютерне моделювання рухів тіл під дією сили всесвітнього тяжіння / І. О. Теплицький, С. О. Семеріков // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія №2. Педагогічні науки: реалії та перспективи. Випуск 12: збірник наукових праць / За ред. П. В. Дмитренка, В. Д. Сиротюка. – К.: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2008. – С. 319–328.
13. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : [монографія] / Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 400 с.
14. Флегантов Л. О. Математичні моделі масового обслуговування у практиці інженерів сільського господарства : [навчальний посібник] / Л. О. Флегантов. – Полтава : Інтерграфіка, 2006. – 124 с.
15. Флегантов Л. О. Спосіб комплектування студентських академічних груп. Патент на корисну модель / Л. О. Флегантов, М. І. Волчкова. Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на винаходи № 69586 10.05.2012.
16. Флегантов Л. О. Методика і алгоритм комплектування студентських академічних груп / Л. О. Флегантов, М. І. Волчкова. // Методи совершенствования фундаментального образования в школах и вузах : Материали XV международной научно-методической конференции 20–24 вересня 2010. — Севастополь, СНТУ, 2010. — С. 173–177.
17. Франс Дж. Математические модели в сельском хозяйстве / Дж. Франс, Дж. Х. М. Торнли ; пер. с англ. А. С. Каменского ; под ред. Ф. И. Ерешко ; предисл. Ф. И. Ерешко и А. С. Каменского. – М. : Агропромиздат, 1987. – 400 с.
18. Швець В. О. Диференційоване навчання математики студентів вищих аграрних закладів освіти: концептуальна модель / В. О. Швець, Ю. І. Овсієнко // Вища освіта України. – 2008. – № 2. – Тематичний вип. «Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології» [дод. 1]. – К. : Гнозис, 2008. – С. 207–215.

Матеріал надійшов до редакції 11.05.2016 р.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД В ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ АГРАРНЫХ ВУЗОВ ОСНОВАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ MS EXCEL

Флегантов Леонид Алексеевич

кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики, логики и физики

Полтавская государственная аграрная академия, г. Полтава, Украина

leonid.flegantov@gmail.com

Овсиенко Юлия Ивановна

кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, логики и физики
Полтавская государственная аграрная академия, г. Полтава, Украина
ovsienkoyulia@online.ua

Аннотация. Рассматривается дифференцированный подход в обучении основам математического моделирования студентов инженерных направлений подготовки аграрных вузов с использованием информационных технологий на примере математической модели механического движения тела в плотной среде. Представлено поэтапное построение, усовершенствование и исследование математической модели трех уровней сложности: без учета сопротивления среды, с учетом сопротивления среды, с учетом эффектов, возникающих вследствие поступательно-вращательного движения тела в плотной среде. Данный подход обеспечивает успешное овладение студентами основными понятиями, методами и процедурами математического моделирования на базовом уровне, формирование представлений о практическом применении математических моделей, развитие начальных навыков научно-исследовательской деятельности.

Ключевые слова: математическая модель; механическое движение; методика обучения; дифференцированный подход; применение компьютерных технологий; учебный вычислительный эксперимент.

DIFFERENTIATED APPROACH IN TEACHING THE BASICS OF MATHEMATICAL MODELING WITH MS EXCEL FOR STUDENTS OF AGRICULTURAL UNIVERSITIES

Leonid O. Flehantov

PhD (Physical and Mathematical Sciences), Associate professor,
Professor of Chair of Higher Mathematics, Logic and Physics
Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine
leonid.flehantov@gmail.com

Yuliia I. Ovsiienko

PhD (Pedagogical Sciences), Associate professor,
Associate professor of the Chair of Higher Mathematics, Logic and Physics
Poltava State Agrarian Academy, Poltava, Ukraine
ovsienkoyulia@online.ua

Abstract. The differentiated approach in teaching the students of engineering training areas of Agricultural Universities for the basics of mathematical modelling by information technology on the example of a mathematical model of the mechanical movement of the body in dense environments is proposed. We considered the phased construction, improvement and research of mathematical model of the three levels of difficulty: without the environment resistance, given the environment resistance, taking into account the effects arising from the forward-rotational motion of the body in dense medium. This approach provides successful mastering by students the basic concepts, methods and procedures of mathematical modeling at the basic level, the formation of representations about the application of mathematical models and basic skills for research activities.

Key words: mathematical model of mechanical movement; methods of teaching; differentiated approach; use of computer technology; educational computing experiment.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Aleshkevich V. A. The course of general physics. Mechanics / V. A. Aleshkevich, L. G. Dedenko, V. A. Karavaev ; pod red. V. A. Aleshkevicha. – M. : FIZMATLIT, 2011. – 472 s. (in Russian)
2. Horda I. M. Computer modeling of the mechanical process of the body in MS Excel [online] / I. M. Horda, L. O. Flehantov // Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia / In-t inform. tekhnolohii i zasobiv navchannia NAPN Ukrainy, Un-t menedzhmentu osvity NAPN Ukrainy; hol.

- red.: V. Yu. Bykov. – 2015. – #3 (47). – Available from: <http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/1245>. (in Ukrainian)
3. Grossman S. Mathematics for biologists / S. Grossman, Dzh. Terner ; per. s angl., predisl. i komment. Ju. M. Svirzheva. – M. : Vyssh. shk., 1983. – 383 s. (in Russian)
 4. Dubovyk V. P. Higher mathematics : [navch. posib. dlia stud. vyshch. navch. zak.] / V. P. Dubovyk, I. I. Yuryk. – 4-te vyd. – K. : Inmateks-Ukraina, 2013. – 648 s. (in Ukrainian)
 5. Kalitkin N. N. Numerical methods: v 2 kn. / N. N. Kalitkin, P. V. Korjakin. – Kn. 2. Methods of Mathematical Physics. – M. : Akademija, 2013. – 304 s. (in Russian)
 6. Klochko V. I. Higher mathematics. Ordinary differential equations (with computer support) : [navchalnyi posibnyk] / V. I. Klochko, Z. V. Bondarenko. – Vinnytsia, 2013. – 248 s. (in Ukrainian)
 7. Ovsiienko Yu. I. Differentiated Learning: Origins, analysis of experience, perspectives / Yu. I. Ovsiienko // Visnyk Cherkaskoho universytetu. Seriiia «Pedahohichni nauky». – 2007. – Vyp. 104. – S. 82–92. (in Ukrainian)
 8. Ovsiienko Yu. I. Research knowledge on mathematics students of agricultural higher education institutions / Yu. I. Ovsiienko // Nauka i suchasnist : zb. nauk. pr. Natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni M. P. Drahomanova. – T. 52. – K. : NPU imeni M. P. Drahomanova, 2005. – S. 66–80. (in Ukrainian)
 9. Ovsiienko Yu. I. Forming tools of mathematics to students of higher educational establishments of the agricultural research skills profile / Yu. I. Ovsiienko // Vyshcha osvita Ukrainy. – 2012. – # 3. – Tematychnyi vyp. «Pedahohika vyshchoi shkoly: metodolohiia, teoriia, tekhnolohii» [dod. 1]. – T. 3. – S. 89–99. (in Ukrainian)
 10. Rakov S. A. Mathematical education: competence approach using ICT : [monohrafiia] / S. A. Rakov. – Kh. : Fakt, 2005. – 360 s. (in Ukrainian)
 11. Sliepkan Z. I. Scientific principles of educational process in higher education : [navch. posib.] / Z. I. Sliepkan. – K. : Vyshcha shk., 2005. – 239 s. (in Ukrainian)
 12. Teplytskyi I. O. Computer modeling of the body under the force of gravity / I. O. Teplytskyi, S. O. Semerikov // Naukovyi chasopys Natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni M. P. Drahomanova. Seriiia #2. Pedahohichni nauky: realii ta perspektyvy. Vypusk 12: zbirnyk naukovykh prats / Za red. P. V. Dmytrenka, V. D. Syrotiuka. – K.: Vyd-vo NPU imeni M.P. Drahomanova, 2008. – S. 319-328. (in Ukrainian)
 13. Tryus Yu. V. Computer-oriented methodical system of teaching mathematics : [monohrafiia] / Yu. V. Tryus. – Cherkasy : Brama-Ukraina, 2005. – 400 s. (in Ukrainian)
 14. Flehantov L. O. Mathematical models of queuing in the practice of agriculture engineers : [navchalnyi posibnyk] / L. O. Flehantov. – Poltava : Interhrafika, 2006. – 124 s. (in Ukrainian)
 15. Flehantov L. O. The method of recruitment of student academic groups. Patent na korysnu model / L. O. Flehantov, M. I. Volchkova. Zareiestrovano v Derzhavnomu reiestri patentiv Ukrainy na vynakhody # 69586 10.05.2012. (in Ukrainian)
 16. Flehantov L. O. The technique and algorithm of students completing academic groups / L. O. Flehantov, M. I. Volchkova. // Metody sovershenstvovanyia fundamentalnoho obrazovanyia v shkolakh y vuzakh : Materialy XV mezhdunarodnoi nauchno-metodycheskoi konferentsyy 20-24 veresnia 2010. – Sevastopol, SNTU.– 2010. – S. 173-177. (in Ukrainian)
 17. Frans Dzh. Mathematical models in agriculture / Dzh. Frans, Dzh. H. M. Tornli ; per. s angl. A. S. Kamenskogo ; pod red. F. I. Ereshko ; predisl. F. I. Ereshko i A. S. Kamenskogo. – M. : Agropromizdat, 1987. – 400 s. (in Russian)
 18. Shvets V. O. Differentiated teaching mathematics students in higher agricultural education institutions: conceptual model / V. O. Shvets, Yu. I. Ovsiienko // Vyshcha osvita Ukrainy. – 2008. – # 2. – Tematychnyi vyp. «Pedahohika vyshchoi shkoly: metodolohiia, teoriia, tekhnolohii» [dod. 1]. – K. : Hnozys, 2008. – S. 207–215. (in Ukrainian)

Conflict of interest. The authors have declared no conflict of interest.



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.