УДК 514.115:744.43:378.147

Ленчук Іван Григорович
доктор педагогічних наук, професор,
професор кафедри методики навчання математики, фізики та інформатики
Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна
lench456@gmail.com

Франовський Анатолій Цезарович
кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан фізико-математичного факультету
Житомирський державний університет імені Івана Франка, м. Житомир, Україна
integral52@mail.ru

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ПЛАНІМЕТРІЇ: МЕТОД ІНВЕРСІЇ

Анотація. У статті актуалізується проблема вивчення перетворень геометричних фігур у планіметрії та ефективного, економного в часі візуального представлення студентами педагогічних університетів (учнями ЗОНЗ – у класах із поглибленим вивченням математики) на екранах дисплеїв сучасних ПК алгоритмів покрокових розв'язувань задач на побудову «круговим» методом інверсії. Раніше розроблені ППЗ (частково, програмний засіб GeoGebra) гарантують оптимально якісну візуалізацію питань теорії перетворення «Інверсія» та ходу моделювання різних зображувальних ситуацій, а їх динамічні характеристики і закладені конструктивні можливості – високоточне, зримо зрозуміле наочно-образне проведення етапів «аналіз» і «побудова» в задачах.

Ключові слова: побудова; конструктивна планіметрія; інверсія; аналіз; моделювання; комп'ютер; педагогічні програмні засоби; технологія навчання.

1. ВСТУП

Постановка проблеми. У передмові до просто і наочно-образно поданого трактату (у 2-х книгах), присвяченого виключно елементарній евклідовій геометрії, читаємо таке: «… більшість теорем елементарної геометрії, котрі виходять за межі шкільного курсу, лише потішні, але непотрібні й лежать далеко у стороні від основної лінії розвитку математичної науки. Проте, окрім конкретних теорем, елементарна геометрія вміщує ще **дві *великі загальні ідеї***, які лягли в основу всього подальшого розвитку геометрії і значення яких далеко виходить навіть за ці достатньо широкі рамки. Мова йде про *дедуктивний* метод і *аксіоматичне* обґрунтування геометрії, по-перше, і про *геометричні перетворення* та *теоретико-групове обґрунтування геометрії*, по-друге. Ці ідеї вельми змістовні та плідні; оскільки вони у своєму безпосередньому розвитку приводять до неевклідових геометрій» [13, с. 4].

Закономірне перетворення у розв'язанні нагального питання теорії і практики виступає в ролі ефективного, діяльнісного відношення між двома фігурами – заданої й тієї, У яку ця фігура перетворюється. Окрім того, елементарна евклідова геометрія вивчає властивості багатовиду фігур, утворених прямими лініями і колами, а групою їх перетворень є подібність (композиція гомотетії і руху). Образно-логічне опанування цього курсу шляхом перетворень фігур послуговує становленню позитивних якостей та розумовому розвитку особи, котра здобуває освіту.

Чи є нині полісенсорні можливості розширення *візуального* представлення інформації у сфері планіметрії, відтворення реального стану оперування її об'єктами, вдаючись, пріоритетно, до зображувальних методів діяльності на основі конструктивного моделювання? Інтенсивний розвиток інформаційно-комунікаційних технологій накладає свій відбиток на освітянський процес. Ефективне залучення комп’ютерів створило передумови для інноваційних зрушень у навчанні, як-от: набули широкого застосування педагогічні програмні засоби (ППЗ), у попиті електронні мультимедійні підручники, створюються освітні портали, впроваджуються «хмарні» навчальні сервіси, виникають мережеві спільноти науковців і т. ін. Зважене використання комп'ютерних технологій дозволяє: поліпшити активність і мотивацію учіння; створити умови для самостійної роботи та комфортне середовище для ефективного засвоєння найпершої з наук; індивідуалізувати та інтенсифікувати навчальний процес; сприяти виробленню самооцінки у студентів (учнів); поліпшити якість візуалізації дисципліни в її викладанні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перетворення в елементарній геометрії є не лише розділом курсу, що поцінований у творчому формуванні особистості суб’єкта навчання, це – *інструмент*, *засіб розбудови* найпершої з наук, незамінний *апарат* педагогічно і методично виваженого виконання супутніх уявлюваних операцій із фігурами та їх елементами. Як результат, у багатьох випадках, й особливо в конструктивній планіметрії, процес візуального вирішення не зовсім простих, різнохарактерних пропозицій відчутно пришвидшується, оптимізується.

Ідея методу геометричних перетворень у найбільш загальному випадку полягає в тому, що на першому етапі розв'язування задачі – у процесі проведення аналізу – поряд із заданими в умові фігурами і тими, які потрібно побудувати, розглядаються й інші, одержані із заданих чи шуканих фігур (або з їхніх частин) за допомогою того чи іншого перетворення. При цьому в кожному окремому випадку треба вибрати те перетворення визначених фігур, після виконання якого побудова зводиться безпосередньо до деякої (вже розв’язаної) елементарної задачі або до простішої побудови [3, с. 44].

Залежно від того, яким саме геометричним перетворенням скористалися, говорять про певний різновид методу геометричних перетворень. Удалий вибір перетворення для розв'язання конкретної конструктивної задачі вважається, певною мірою, мистецтвом розв'язуючого. Перетворення інверсії, в такому плані, не є винятком. Чимало задач саме цим методом розв’язуються набагато простіше, ніж будь-яким іншим методом.

Не секрет, що перетворення подібності переводить кожну пряму лінію у пряму лінію, а кожне коло – в коло. Однак існують ще й перетворення, котрі кожну пряму лінію переводять у пряму лінію, але не обов’язково коло в коло. Як перетворення подібності, так і останнє перетворення називають лінійним, а геометрію, котра визначається за допомогою групи колінеарних перетворень, називається проективною. І навпаки, перетворення, які переводять кола знову ж у кола (чи у прямі), і не обов’язково прямі – у прямі, називають круговими, а геометрія, котра визначається за допомогою групи кругових перетворень, називається конформною (аналагматичною) [14, с. 12, 13].

Дослідження, присвячені інноваційним педагогічним технологіям і, в першу чергу, створенню та розробці нових методик і комп’ютерних технологій навчання, науково повно проведені вітчизняними вченими: Жалдаком М.І., Крамаренко Т.Г., Морзе Н.В., Раковим С.А., Рамським Ю.С., Співаковським О.В., Спіріним О.М., Триусом Ю.В. та ін. [2, 4-7, 9-12]. Акад. Жалдак М.І. підкреслює: «… для використання *засобів сучасних інформаційних технологій* у вивченні *математики*, фізики, загальнотехнічних та інших дисциплін зовсім не обов’язково знати будь-які мови програмування, складати власні алгоритми і програми, знати фізичні, арифметичні і логічні принципи будови та дії комп’ютера і т. п. *Головне – досконале знання відповідної предметної галузі і* методики *використання засобів ІКТ у її вивченні.* З правилами використання сучасних ППЗ можна ознайомитись за досить короткий час» [4, с. 6].

Серед ППЗ інтегрованого характеру, призначених для ефективного використання у вивченні тих чи інших розділів математики і цілком придатних для розв’язування геометричних задач, варто виділити такі програмні засоби: GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, Derive, DG, GeoGebra, SAGE, SciDAVis та ін.

Можна припустити, що прогрес у геометричній освіті певною мірою залежить від рівня її поміркованої, фахової комп’ютеризації. Нижче розкриємо цю тезу прикладами.

Як робочий інструмент обираємо програму **GeoGebra**. У ній розробниками закладено всі найпростіші побудови (НП) і більшість основних побудов (ОП), а можливість збереження взаємозв’язків між задіяними об’єктами дозволяє прослідковувати всі етапи розв’язання задачі, ідеально оформляти рисунки, демонструвати з допомогою так званих «керуючих кнопок» динаміку створення навчальної моделі. Не менш важливою перевагою ППЗ є його доступність у створенні макроконструкцій – сукупності об’єктів базових типів, призначених для спрощеного задавання комбінацій геометричних фігур, що часто використовуються.

Мета статті. Педагогічно виважене використання комп’ютерів у викладанні й учінні різних дисциплін є незамінним атрибутом прогресивного навчання. Найбільш показово інноваційні технології можна впроваджувати в геометрії. Отже, ми ставимо за мету *шляхом ефективного застосуванням сучасних* ІКТ на прикладах задач, розв’язаних із використанням ППЗ **GeoGebra**, переконати студентів ВПНЗ в результативності навчання планіметрії діяльнісним, ***динамічно візуалізованим*** конструктивно-генетичним методом, продемонструвавши *тісний зв'язок* ***основного різновиду*** кругових перетворень **– інверсії –** з *елементарною евклідовою геометрією*.

Конструктивізм математичний – це напрям у математиці та побудовані на його основі математичні теорії (конструктивні логіка та теорія множин, аналіз, арифметика тощо). За його канонами, основним у побудові математичних теорій є **конструктивно-генетичний метод**, згідно якому будь-який математичний об’єкт і будь-яке твердження про нього повинні бути результатом діяльності мислення з побудови більш складних конструкцій із простих, за визначеними простими й такими, що легко контролюються правилами побудови – алгоритмами, які дозволяють з допомогою скінченого числа кроків, скінченого числа операцій за скінчений час однозначно одержати результуючу конструкцію.

2. МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Щоб успішно реалізувати поставлені цілі дослідження, ми проаналізували стан використання ІКТ та ППЗ у навчанні геометрії, опрацювавши відповідні наукові джерела; ознайомилися з практичним досвідом колег і вітчизняних науковців, узагальнили свій власний досвід; здійснили вибір ППЗ; експериментально перевірили ефективність напрацювань та провели цільове педагогічне спостереження в академічних групах.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

Теоретична складова перетворення «Інверсія» досить не проста і на слух у жодному разі не може сприйматися. Лише динамічно, покроково виконане рисункове моделювання будь-якої ситуації за участю перетворення у змозі додати істинного розуміння не лише означення інверсії, але також її властивостей. До того ж, розділ

«Планіметрія» насичений задачами на побудову і кожна з них, як на погляд пересічного учня, відрізняється від уже розв'язаної; існують різні методи розв'язування; одна і та сама задача може бути розв'язана кількома методами.

Фігура, котру потрібно побудувати, означується дескриптивно. Щоб перейти до означення конструктивного, тобто «побачити» в уявленнях шлях розв'язання (складання покрокового алгоритму НП і ОП – етап аналізу), слід визначитися з методом моделювання операцій циркулем і лінійкою й грамотно виконати доречні додаткові побудови. Етап побудови замовленої фігури містить, як правило, значну кількість НП. Хоч формування вмінь і навичок візуальних дій у геометрії, набуття досвіду в оперуванні традиційними креслярськими інструментами є позитивним фактором розвитку особистості учня, проте процес обґрунтованого, акуратного подання розв'язку зображенням вимагає відчутних затрат у часі. Очевидно, що в такій ситуації незамінним помічником якраз і можуть стати ППЗ навчання і комп'ютер.

Наразі в навчальних посібниках, після теоретичного висвітлення того чи іншого методу, наводяться зразки вже розв'язаних задач і тексти для їх самостійного розв'язання (див., напр., [3]). Підсумувавши результати науково-дослідної роботи зі студентами в цій сфері, проаналізувавши науково-методичні матеріали і взявши до уваги розроблену методологію активізації навчально-пізнавальної діяльності шляхом геометризації і унаочнення різного роду пропозицій, ми пропонуємо педагогічно виважено, вдумливо вдатися до комп'ютеризації такої діяльності.

Кругові перетворення не є предметом вивчення в ЗОНЗ, проте вони включені окремим складовим питанням у курс аналітичної геометрії в педагогічних університетах. Найпершим цікавим фактом, до якого варто привернути увагу студентів, є те, що задають інверсію двома зовсім не схожими (як на перший погляд) способами.

Традиційно інверсією на площині називають відповідність, котра здійснюється так. Нехай задано точку O, яка називається центром інверсії, та додатне число r^2, яке має назву степеня інверсії. Візьмемо довільну точку A площини, що відрізняється від центра інверсії O. Образом точки A в перетворенні інверсії називається така точка A' променя OA, для якої виконується рівність $OA \cdot OA' = r^2$ (*) (inversio з латини – переставлення) [3, с. 118].

З означення безпосередньо випливають такі властивості й особливості інверсії.

1. Якщо образом точки A є точка A', то образом точки A' є точка A (див. рівність (*)). Отже, при інверсії точки A і A' міняються місцями. Таку властивість інверсії називають інволютивною (involutio з латини – згортка). Кажуть також, що кожна пара відповідних точок в інверсії – циклічна.

2. Центр інверсії не має відповідної точки. Очевидно, що інверсія на площині з виколотим центром *є* взаємно однозначним відображенням, тобто перетворенням.

3. Якщо $OA<r$, то $OA'>r$ (і навпаки, $OA>r$, то $OA'<r$). Якщо при цьому OA зростає, то OA' спадає (і навпаки). Якщо $OA=r$, то й $OA'=r$; отже, в цьому випадку $A' \equiv A$, тобто A – подвійна (інваріантна) точка.

4. Коли r – заданий відрізок, то відповідну відносно A точку A' можна побудувати циркулем і лінійкою, будуючи відрізок OA' як четвертий пропорційний: $OA' = \dfrac{r \cdot r}{OA}$.

Конструктивне задавання інверсії. Геометрично-алгебричному способу задавання інверсії, відображеному рівністю (*) в уже сформульованому щойно означенні, відповідає еквівалентний суто геометричний (конструктивний) спосіб. Зупинимося на ньому.

Розглянемо коло з радіусом r, центром якого є задана точка O (коло інверсії, яке іноді позначають r^2; рис. 1). Із властивостей 3 й 1 випливає, що при інверсії площини з центром O і степенем r^2 внутрішня область відносно кола інверсії переходить у його зовнішню область, а зовнішня – у внутрішню; точки самого кола залишаються на місці, площина ніби вивертається.

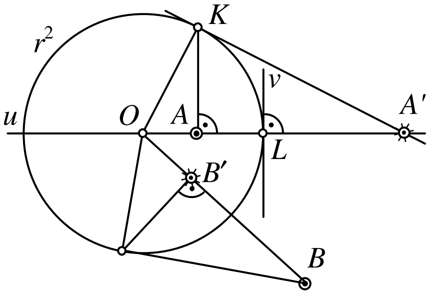

Рис. 1

Побудову відповідних точок можна виконати так. Нехай спочатку точка A лежить усередині круга інверсії. Поставимо перпендикуляр AK до прямої OA та проведемо в точці K його перетину з колом інверсії дотичну KA' до кола ($A' \in OA$). Точка A' є образом точки A. Справді, у прямокутному трикутнику OKA' відрізок AK – висота до гіпотенузи OA'; таким чином, за середніми геометричними: $OA \cdot OA' = r^2$. Оскільки за властивістю 1 образом точки A' є точка A, побудову образів точок зовнішньої області кола інверсії потрібно виконувати у зворотній послідовності: спочатку проводити дотичну до кола r^2 із точки A', а потім із точки дотику K опускати на промінь OA' перпендикуляр OA (див. пару $B \leftrightarrow B'$).

Нехай тепер точка A прямуватиме до точки L, яка є перетином прямої $u \equiv OA$ з колом інверсії r^2. З попереднього логічно випливає, що точка A' прямуватиме до точки L з протилежного боку. Зустрінуться точки A і A' на колі з центром у точці O в подвійній (нерухомій) точці L.

Як підсумок, можна зробити вельми важливий висновок: геометрично інверсія повністю визначається своїм колом інверсії. Коло інверсії ще називають базисним.

Інверсія – як симетрія відносно кола. Зараз в уявленнях змоделюємо ще таку ситуацію. Нехай центр інверсії – точка O – необмежено віддаляється по прямій u від точки L, а коло r^2 при цьому весь час проходить через точку L. Оскільки радіус інверсії r необмежено зростає, коло r^2 розпрямляється, перетворюючись у пряму $v \perp u$. Очевидно, що при цьому граничним випадком інверсії буде осьова симетрія з віссю v. Це означає, що відповідні пари A і A', B і B', … інверсних точок перейдуть у симетричні точки відносно прямої v. У зв'язку з цим інверсію називають також симетрією відносно кола. Ретельно обґрунтуємо даний факт (див. [14], глава II).

Найперше зауважимо, що осьова симетрія є особливим різновидом руху, оскільки і паралельне перенесення, і поворот навколо точки на заданий кут можна завжди подати композицією двох осьових симетрій [8, с. 19, 20].

Розглянемо один із способів побудови пар відповідних точок, якщо зображено вісь симетрії – пряму l (рис. 2). Тут використовують ту закономірність, що всі кола з центром на прямій l, які вміщують будь-яку задану точку A, проходять також через точку A', симетричну A відносно l. Цей факт можна прийняти за означення осьової симетрії: *точки A і A′* називаються симетричними відносно прямої l, якщо кожне коло з центром на прямій l, котре проходить через точку A, проходить одночасно і через точку A'. Отже, $\omega_1(O_1,\ r_1=O_1A) \cap \omega_2(O_2,\ r_2=O_2A)=(A,\ A')$. Таке означення, очевидно, рівносильне відомому, традиційно прийнятому означенню.

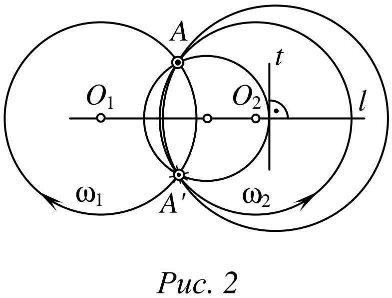

Рис. 2

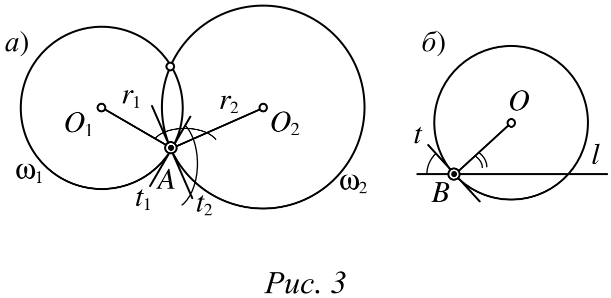

Рис. 3

Тепер пригадаємо, що кутом *між двома колами* називається кут між дотичними до кіл у точці їх перетину. Звідси випливає, що кут між двома колами дорівнює куту між їх радіусами, проведеними в точку перетину кіл (чи суміжному куту; рис. 3, *а*). Аналогічно означується кут між прямою і колом (рис. 3, *б*).

Кола, центри яких лежать на заданій прямій l, і лише ці кола перпендикулярні до прямої l (рис. 2). Звідси випливає ще одне означення симетрії відносно прямої l: точка A' симетрична точці A відносно прямої l, якщо кожне коло, котре проходить через точку A і перпендикулярне до осі симетрії l, проходить через точку A'.

Теорема 1. *Усі кола, які проходять через точку A і перпендикулярні до заданого кола* ω, *котре* ***не*** *проходить через точку A, проходять одночасно через деяку точку A′, що відмінна від точки A.*

Доведення. Нехай коло ω_1 проходить через задану точку A і перпендикулярне до деякого кола ω ($B=\omega_1\cap\omega$ і $OB\perp O_1B$; рис. 4, *а*). Проведемо пряму OA і знайдемо її перетин із колом ω_1: $OA'\cap\omega_1=A'$. Оскільки OB – дотична до кола ω_1, то $OA\cdot OA'=OB^2$ або, по іншому, $OA'=\dfrac{r^2}{OA}$, де r – радіус кола ω. З цієї рівності випливає, що розташування точки A' не залежить від вибору кола ω_1. Отже, всі кола ω_1, перпендикулярні до ω і такі, що містять точку A, перетинають пряму OA в одній і тій самій точці A' (центри таких кіл лежать на серединному перпендикулярі відрізка AA'; рис. 4, *б*). Теорема доведена.

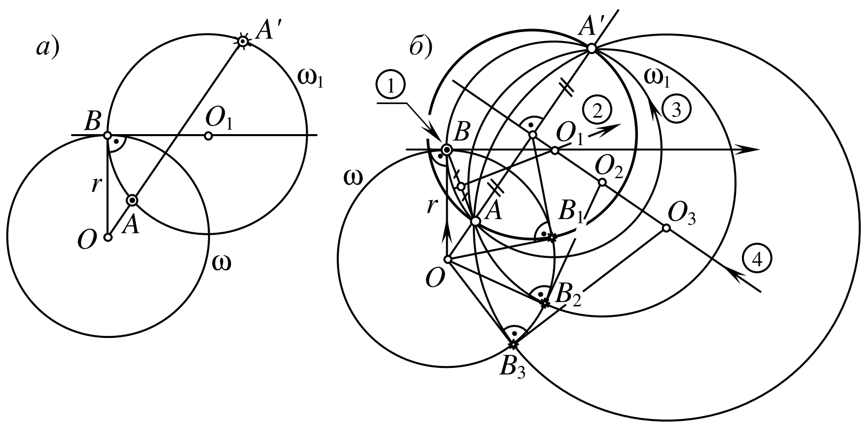

Рис. 4

Тепер буде природним таке означення: Точка A' називається симетричною точці A відносно кола ω, якщо кожне коло, яке містить точку A і перпендикулярне до кола ω, проходить через точку A'.

Порівняно з останнім означенням симетрії відносно прямої (див. жирний шрифт) констатуємо, що перетворення інверсії по праву називають симетрією відносно кола.

Якщо точка A' симетрична точці A відносно кола ω, то очевидно, що й точка A теж симетрична точці A' відносно кола ω; це дозволяє говорити, що точки A і A' є взаємно симетричними відносно кола; коло ω називають ще колом відбиття.

Зараз наслідком із симетрії відносно кола випливає найперше означення інверсії: інверсією з центром у точці O і радіусом інверсії r (степенем інверсії r^2) називається перетворення, що переводить кожну точку $A\neq O$ площини в точку A', яка лежить на промені OA і для якої справедлива рівність $OA'=\dfrac{r^2}{OA}$. Таке означення, що не важко побачити, у свою чергу, надто схоже до означення симетрії відносно прямої.

Антипаралельність. Нехай задано дві прямі, що перетинаються: $u \cap v=O$ (рис. 5). Відомо, що прямі, які утворюють відповідно рівні кути з однією спільною стороною цих кутів, є паралельними (на рисунку $AB \| CD$). Усупереч попередньому, розглянемо тепер такі прямі AB і $A'B'$, які утворюють рівні кути з різними сторонами кута uOv, а саме такі, що $\angle OAB=\angle OB'A'$ (підкреслимо, що обидва кути з однією і тією градусною мірою є, що видно на рисунку, внутрішні для трикутників OAB і $OB'A'$; зрозуміло, що кути, суміжні з ними, теж рівні, але обидва вони вже зовнішні для згаданих трикутників). Прямі AB і $A'B'$, котрі мають указану властивість, називаються антипаралельними. Вони, як і паралельні прямі, відіграють значну роль у геометрії, що пов’язано з такою теоремою.

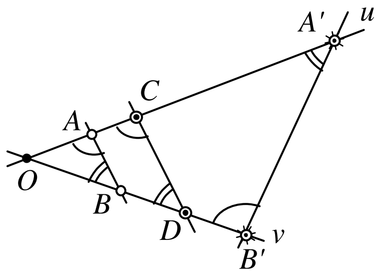

Рис. 5

Теорема 2 (*критерій антипаралельності*). *Для того, щоб січні AB і A′B′ заданого кута були антипаралельними, необхідно і достатньо, щоб пари точок A й A′, B й B′ були відповідними в одній і тій самій інверсії.*

Необхідність. Нехай прямі AB і $A'B'$ – антипаралельні. Тоді $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$, звідки матимемо $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OB'}{OA'} \Rightarrow OA \cdot OA'=OB \cdot OB'$ $(=r^2)$, а це й означає, що $A \to A'$, $B \to B'$ в інверсії з центром O та степенем r^2.

Достатність. Вона випливає з міркувань, проведених у зворотному порядку.

Інверсія прямих і кіл. **1**. З означення інверсії випливає, що кожен відкритий промінь з початком у центрі інверсії переходить сам у себе. Звідси випливає, що будь-яка пряма, яка проходить через центр інверсії (з виколотим центром), переходить сама в себе.

2. Розглянемо тепер пряму u, яка не проходить через центр інверсії (рис. 6). Опустимо на цю пряму перпендикуляр OA і проінверсуємо точку $A \to A'$. Фіксуємо точки A і A'. Візьмемо довільну точку $M \in u$. Нехай M' – образ точки M. Прямі AM і $A'M'$ (за критерієм) – антипаралельні; отже, $\angle OM'A'=90°$. Звідси точка M' належить колу **Г** діаметром OA' (центр O_1). Для повноти міркувань потрібно ще довести, що кожна точка $N' \neq O$ кола **Г** є образом деякої точки N прямої u. Не важко побачити, що пряма ON' обов’язково перетне пряму u в одній-єдиній точці N. Оскільки $\angle ON'A'=\angle OAN=90°$, прямі AN і $A'N'$ також є антипаралельними; отже, пара точок N і N' – інверсні у заданому перетворенні. Таким чином, можна зробити висновок: пряма, що не проходить через центр інверсії, переходить у коло, яке проходить через центр інверсії (за винятком самого центра).

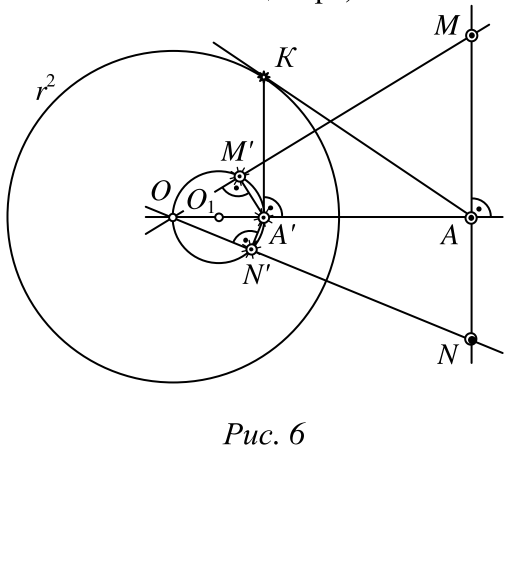

Рис. 6

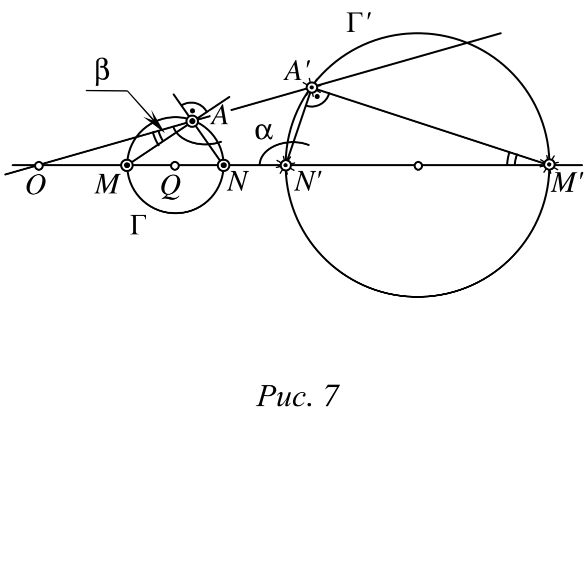

Рис. 7

З урахуванням властивості 1, тепер автоматично випливає, що коло, яке проходить через центр інверсії (за винятком самого центра), перетворюється у пряму, котра не проходить через центр інверсії.

3. Залишається з'ясувати, у яку фігуру переходить при інверсії коло, яке не проходить через центр інверсії. Нехай **Г** є заданим колом із центром у точці Q, а r^2 – коло інверсії з центром у точці O (на рис. 7 не показане). Коло **Г** перетинає промінь OQ у точках M і N. Фіксуємо ці точки та їхні образи M' і N'. Візьмемо на колі **Г** довільну точку A і побудуємо інверсну їй току A'. Вирізняємо пари прямих AM і $A'M'$, AN і $A'N'$. Вони – антипаралельні. Тому звідси матимемо: $\angle OAN=\angle ON'A'=\alpha$, $\angle OAM=\angle OM'A'=\beta$. Оскільки $A\in$ **Г**, а M і N – кінці діаметра заданого кола, дістанемо $\angle MAN=\angle OAN-\angle OAM=\angle ON'A'-\ -\angle OM'A'=\alpha-\beta=90°$. Однак, що можна легко з'ясувати за рисунком, кут $M'A'N'$ теж дорівнює різниці кутів α і β (90°). Отже, точка A' належить колу **Г′** з діаметром $M'N'$. Аналогічно доводиться, що кожна точка кола **Г′** є образом деякої точки кола **Г**. Таким чином, образом кола **Г** є коло **Г′**. У результаті отримуємо остаточний висновок: коло, котре не проходить через центр інверсії, перетворюється в коло, яке теж не проходить через центр інверсії.

Інваріантні кола. З попереднього очевидно випливає, що базисне коло інверсне саме собі. Чи існують інші кола, які мають таку ж властивість? ([1], §6).

Теорема 3. *Для того, щоб коло*, *відмінне від кола інверсії*, *перетворювалось у себе*, *необхідно і достатньо*, *щоб воно було ортогональним базисному колу*.

Необхідність. Нехай коло **Г**(O_1, r_1), відмінне від базового кола, перетворюється в себе, а P – довільна його точка, котра не належить колу r^2 (рис. 8). Нехай також P' є образом точки P. Тоді одна із двох точок P і P' знаходиться зовні, а інша всередині кола r^2. Отже, коло **Г** перетинає коло інверсії. Позначимо через Q одну з точок їх перетину. Доведемо (методом від супротивного), що OQ – дотична до кола **Г**. Припустимо, що OQ перетинає коло **Г** ще й у точці Q'. Зауважимо, точки P і P' розташовані з одного боку від точки O, тобто точка O лежить зовні кола **Г**. За відомою властивістю січних, проведених до кола, $OQ\cdot OQ'=OP\cdot OP'=r^2$. Оскільки $OQ=r$, то й $OQ'=r$, тобто точки Q і Q' зливаються, всупереч припущенню. Отож, OQ є дотичною до кола **Г**, а кола r^2 і **Г** – ортогональні.

Достатність. Нехай коло **Г** ортогональне базовому колу r^2, а P – довільна точка кола **Г**. Пряма OP перетне коло **Г** ще в деякій точці P' (якщо пряма OP дотикається кола **Г**, за P' приймаємо P). Із того, що коло **Г** ортогональне колу r^2 маємо, що пряма OQ, яка з'єднує центр інверсії з точкою перетину кіл, дотикається кола **Г**. Тому $OP\cdot OP'=OQ^2=r^2$, а точка P' інверсна точці P. Таким чином, при інверсії відносно кола r^2 кожна точка P кола **Г** перетворюється в точку P' цього ж кола.

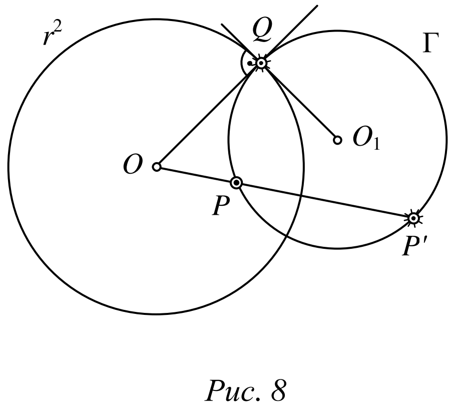

Рис. 8

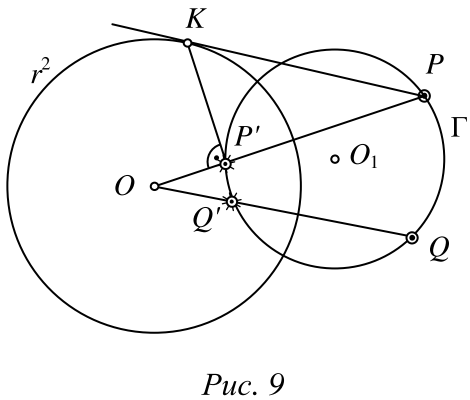

Рис. 9

Узявши до уваги властивість циклічності пар точок в інверсії, можна стверджувати й обернене: кожна точка кола **Γ** є образом деякої точки цього ж кола. Отже, в інверсії коло **Γ** перетворюється само в себе.

Теорема 4. *Якщо коло проходить через дві взаємно інверсні точки, то в інверсії воно перетворюється в себе.*

Доведення. Нехай коло **Γ** проходить через точки P і P', інверсні відносно кола r^2. Тоді $OP\cdot OP'=r^2$. Зрозуміло, що точка O лежить поза колом **Γ**. Нехай Q – довільна точка на колі **Γ** (рис. 9). Проведемо промінь OQ і знайдемо його перетин із колом **Γ** в точці Q' (у випадку дотикання променя OQ із колом **Γ** $Q'\equiv Q$), тоді $OQ\cdot OQ'=OP\cdot OP'=r^2$, тобто точка Q інверсна точці Q'. Таким чином, якщо деяка точка лежить на колі **Γ**, то інверсна їй точка також лежить на цьому колі. Звідси випливає, що при інверсії коло **Γ** переходить саме в себе.

Наслідок. Коло, яке проходить через дві взаємно інверсні точки, ортогональне до базового кола інверсії. Сукупність кіл, які проходять через дві взаємно інверсні точки, утворюють еліптичний пучок, що вміщує кола, ортогональні базовому колу інверсії.

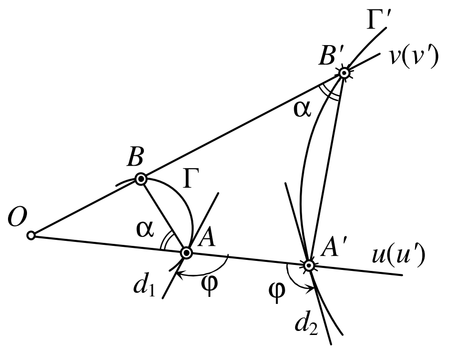

Рис. 10

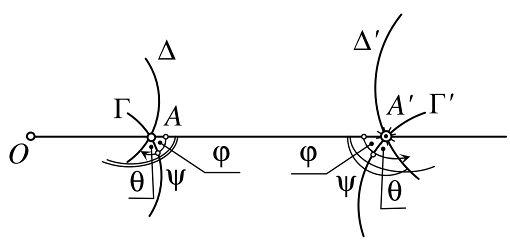

Рис. 11

Конформність інверсії. Нагадаємо, що кутом між двома кривими лініями в точці їх перетину називається кут між дотичними до кривих у цій точці.

Нехай у заданій інверсії дуга **Γ** перетворилася в дугу **Γ′**. Проведемо через центр O інверсії до цих дуг дві січні u і v (рис. 10), які в перетині з кривими визначають дві пари інверсних точок $A\to A'$ та $B\to B'$. Скориставшись властивістю антипаралельності, маємо: $\angle BAO=\angle A'B'O=\alpha$. (*)

Фіксуємо промінь u, а промінь v повертаємо навколо точки O до злиття із променем u. Точки B і B' уздовж дуг **Γ** та **Γ′** прямуватимуть відповідно до точок A і A', січна BA прямуватиме при цьому до дотичної d_1, проведеної до кривої **Γ** в точці A, а січна $B'A'$ – до дотичної d_2, проведеної до кривої **Γ′** у точці A' (наголошуємо, що на відміну від дуг **Γ** та **Γ′** прямі AB й $A'B'$ і дотичні d_1 і d_2 не є інверсними фігурами). Тут змінний кут α переходить у деякий кут φ, а рівність (*) – у рівність $\angle A'Ad_1=\angle AA'd_2=\varphi$. (**)

Рівність (**) показує, що кут між u і **Γ** дорівнює куту між $u'\equiv u$ та **Γ′**.

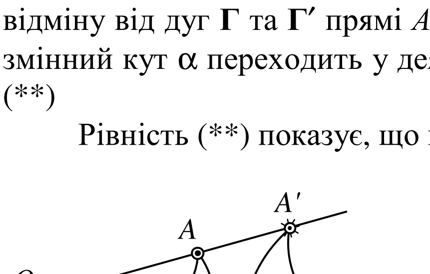

Рис. 12

Зараз розглянемо загальний випадок (рис. 11). Нехай тепер через пару інверсних точок A і A' проходять відповідні пари дуг **Γ**→**Γ′** та Δ→Δ′. Маємо $\angle(u,\ \mathbf{\Gamma})=\angle(u,\ \mathbf{\Gamma}')=\varphi$, $\angle(u,\ \Delta)=\angle(u,\ \Delta')=\psi$, звідки $\angle(\mathbf{\Gamma},\ \Delta)=\angle(\mathbf{\Gamma}',\ \Delta')=\psi-\varphi=\theta$ (з метою спрощення рисунка 9, на ньому відсутнє зображення дотичних до кривих). Отже, ми довели, що інверсія зберігає градусну міру кута. Проте, що добре демонструють рисунки 6 і 7, вона змінює орієнтацію відповідних кутів. Із рисунка 12 також вочевидь випливає, що інверсія змінює орієнтацію відповідних криволінійних трикутників (і взагалі, багатокутників).

У нескінченно малому дуги майже не відрізняються від прямолінійних відрізків, а відповідні криволінійні трикутники – від подібних прямолінійних (за рівністю кутів). У зв'язку з цим інверсію відносять до конформних перетворень (з пізньої латині conformis – подібний, узгоджений за формою; деякі автори називають інверсію антиконформною, оскільки в нескінченно малому відповідні трикутники дзеркально-подібні, а відповідні кути протилежно орієнтовані).

Приступаючи до розв'язування задач, варто пам'ятати, що в деталізованому переліку кроків побудови усяка візуальна діяльність лінійкою і циркулем реально здійснюється з використанням скінченої кількості операцій, кожна з яких є виключно однією з дев'яти можливих НП. Останні компонують у типові, що часто зустрічаються *комбінації*, тобто зводять до відомих і нескладних конструктивних задач, уже розв'язаних раніше, які називають ОП [8, с. 10-12].

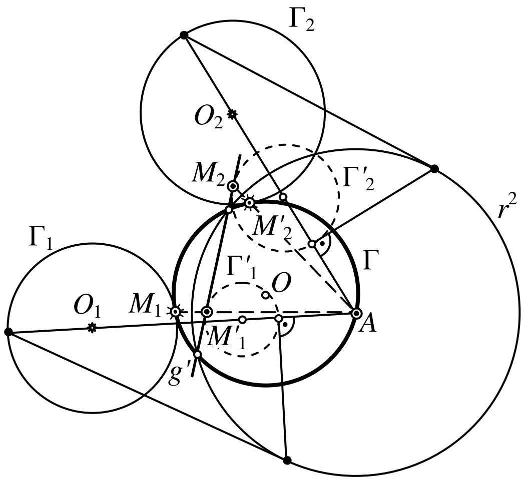

Рис. 13

Фрагменти навчальних динамічних моделей (у формі зображуваних результатів розв'язаних задач), що покроково реалізовувалися у програмі **GeoGebra**, подаватимемо в установленому порядку з екрана ПК.

Задача 1. *Побудувати коло, яке проходить через задану точку і дотикається до двох заданих кіл.*

Розв'язання. На рисунку 13 $\mathbf{\Gamma}_1$ та $\mathbf{\Gamma}_2$ – задані кола, A – задана точка, $\mathbf{\Gamma}$ – шукане коло, що має дотикатися до кіл $\mathbf{\Gamma}_1$ та $\mathbf{\Gamma}_2$ (у поки що невідомих точках M_1 і M_2). Інверсія дає змогу звести дану задачу до простішої. Справді, скористаємося тим, що це перетворення зберігає кути, а коло, котре проходить через центр інверсії, переходить у пряму лінію. Для цього виберемо точку A за центр інверсії та побудуємо коло інверсії r^2 довільним радіусом.

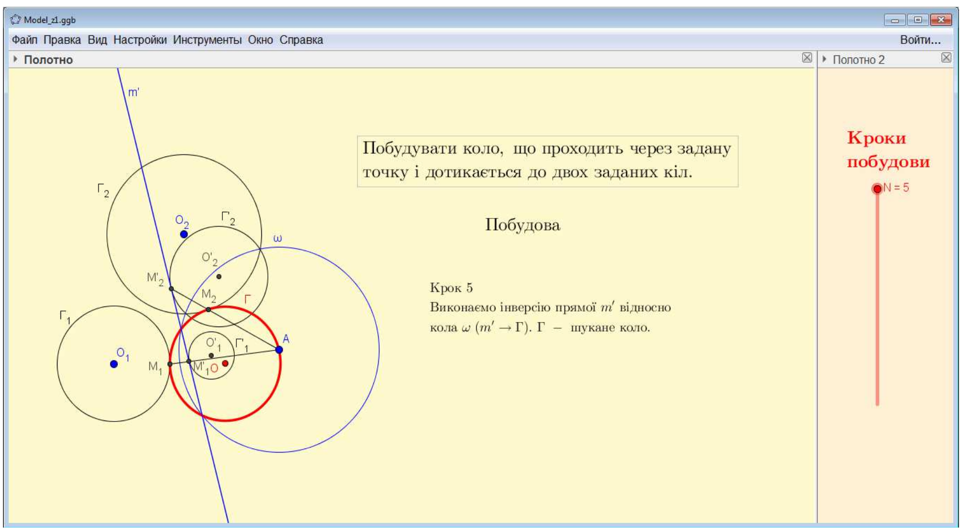

Рис. 13. Фрагмент зображення GeoGebra до задачі № 1

Ця інверсія переведе коло **Г** у пряму g' (поки що невідомі), а задані кола $\mathbf{Г}_1$ і $\mathbf{Г}_2$ – в кола $\mathbf{Г}'_1$ і $\mathbf{Г}'_2$, які можна побудувати. Оскільки дотик зберігається, пряма g' повинна дотикатися до кіл $\mathbf{Г}'_1$ і $\mathbf{Г}'_2$ (M'_1 і M'_2 – точки дотику). Отже, задача звелася до побудови спільної дотичної двох кіл, яку легко розв'язати. Та сама інверсія переводить знайдену пряму g' у шукане коло **Г**.

З'ясуйте: як взаємне розміщення заданих кіл вплине на шлях розв'язання задачі?

Відомо також, що на рисунку 13 до кіл $\mathbf{Г}'_1$ і $\mathbf{Г}'_2$, які не перетинаються, можна провести ще три спільні дотичні (одну зовнішню та дві внутрішні), тобто отримати ще три розв'язки. Пропонуємо читачеві відповідні побудови виконати самостійно.

Задача 2. *Побудувати трикутник за такими даними*: $\angle A - \angle C = \varphi$, $a \cdot c$ *та* h_b.

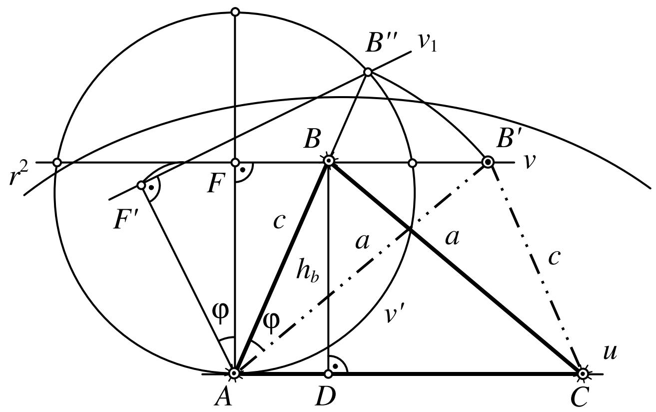

Рис. 14

Аналіз. Припустимо, що вже зображений на рисунку 14 трикутник ABC цілком задовольняє умову задачі. Безсумнівно, що вибравши будь-де вершину A, можна довільно провести пряму u, якій має належати основа AC (1). Дзеркально відбивши трикутник ABC у серединному перпендикулярі основи AC (на рисунку його не показано), дістанемо трикутник $CB'A$. Точки B і B' належать прямій $v \| u$; Знаючи h_b, можна провести пряму v (2). Матимемо, що $\angle BAB' = \varphi$, $AB' = a$. Опустимо перпендикуляр AF (3) та повернемо трикутник AFB' у положення $AF'B''$. Точки A, B і B'' лежатимуть на одній прямій; далі фігуру $AF'v_1$ можна побудувати (4). За умовою $AB \cdot AB'' = a \cdot c = r^2$, де r – відомий відрізок. Отже, точки B та B'' є відповідними в інверсії з центром A, причому коло інверсії r^2 можна побудувати (5). Побудуємо коло v', інверсне прямій v (6). Воно обов'язково пройде через точку B''; отже, $B'' = v_1 \cap V'$, $B = = v \cap AB''$ (7). Оскільки $AB'' = a = BC$, тепер можна побудувати також вершину C (8).

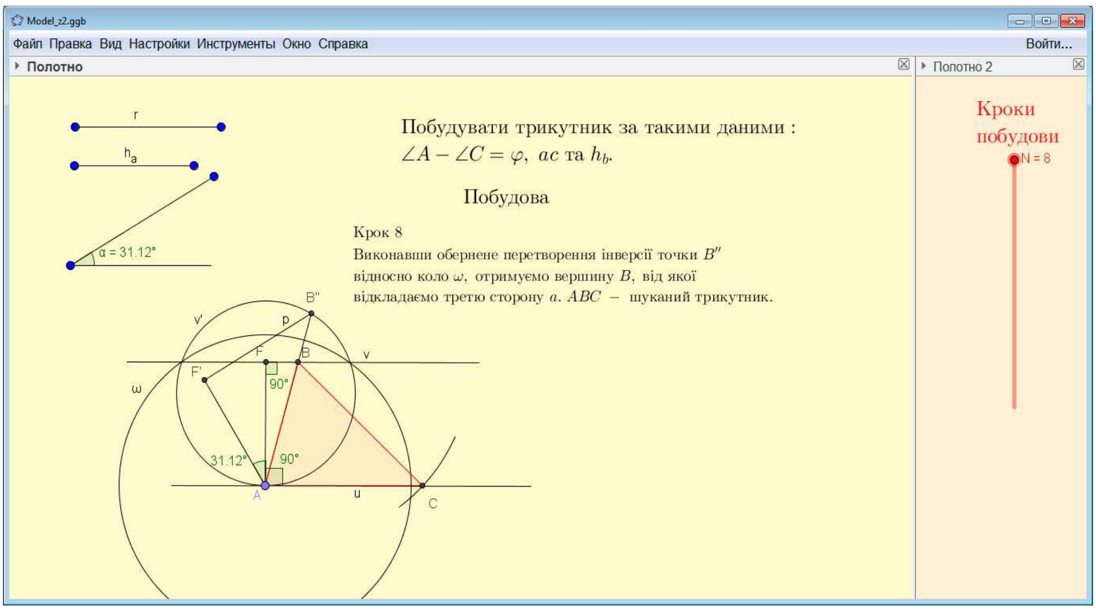

Рис. 14. Фрагмент зображення GeoGebra до задачі № 2

Доведення. Висота BD трикутника ABC дорівнює h_b за побудовою. Оскільки $BC=AB''$ і точки B та B'' є відповідними у введеній інверсії за побудовою, $AB\cdot AB''=a\cdot c=$ $=r^2$. Повернемо фігуру $AF'v_1$ на кут φ у положення AFv. Образ B' точки B'' належатиме прямій v, причому $\angle BAB'=\varphi$. Так як $AB'=BC$ і $AC\|BB'$, маємо $\angle B'AC=\angle BCA$; отже, у трикутнику ABC різниця кутів $\angle A-\angle C=\varphi$. Задачу розв'язано.

Задача 3. *У заданий паралелограм ABCD уписати паралелограм MNPQ, що має задану площу* $S=m^2$ *і заданий кут* α *між його діагоналями*.

Аналіз. Нехай рисунок 15 задовольняє умову задачі. Зауважимо: по-перше, обидва паралелограми мають спільний центр симетрії O; по-друге, *добуток* відстаней від центра до суміжних вершин шуканої фігури $MNPQ$ уже відомий.

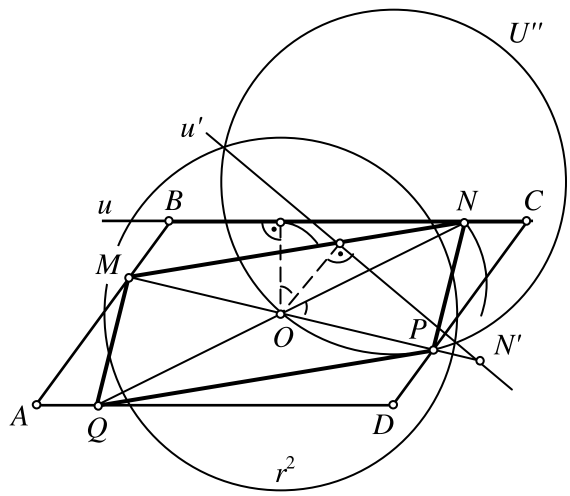

Рис. 15

Повернемо систему $OBNC$ навколо точки O на заданий кут α. Пряма $BC=u$ перейде у пряму u', точка N – у точку N' на діагоналі MP. Точки P й N' є відповідними у ***відомій*** інверсії з центром у точці O: справді, за умовою задачі $S=m^2$, де m – заданий відрізок. З іншого боку, матимемо: $S=2\cdot OP\cdot ON\cdot\sin\alpha=2\cdot OP\cdot ON'\cdot\frac{p}{q}$, де відрізки p та q, знаючи кут α, можна побудувати (1). Покладаючи далі $OP\cdot ON'=r^2$, дістанемо $r^2\frac{2p}{q}=m^2\Rightarrow r^2=\frac{m^2q}{2p}=mp_1$, де відрізок $p_1=\frac{mq}{2p}$ легко будується (2). Таким чином, можна також побудувати радіус кола r згаданої інверсії: $r=\sqrt{mp_1}$ (3), а отже, і коло інверсії r^2 (4). Образом прямої u' в інверсії (O, r^2) є коло U'' (5), що проходить через точки O і P. Тому $P\in CD\cap U''\Rightarrow OP$ (6) $\Rightarrow N'=OP\cap u'$, $M=OP\cap AB$. Після цього неважко зобразити дві останні вершини шуканого паралелограма N та Q (7; 8).

Доведення. Нехай побудову виконано. Чотирикутник $MNPQ$ є паралелограмом, уписаним у паралелограм $ABCD$, адже їх центри зливаються в точці O, а вершини M, N, P і Q належать відповідним сторонам заданого паралелограма. Оскільки систему точка-пряма (O, u) із точкою N на u, котра перейшла в точку N', було повернуто навколо точки O на кут α ($ON\to ON'$, $P\in ON'$), кут між діагоналями шуканого паралелограма істинно дорівнює α. До того ж, центром O та парою точок P і N' визначено інверсію r^2, в якій (за побудовою) $r=\sqrt{mp_1}$, де $p_1=\frac{mq}{2p}$, m – заданий відрізок, а $\frac{p}{q}=\sin\alpha$. Отже, $r^2=\frac{m^2q}{2p}\Rightarrow\Rightarrow m^2=r^2\frac{2p}{q}=2\ OP\cdot ON'\sin\alpha=2\ OP\cdot ON\cdot\sin\alpha=S_{MNPQ}$. Таким чином, площа паралелограма $MNPQ$, уписаного в заданий паралелограм $ABCD$, справді рівна m^2. Остаточно матимемо, що так побудований паралелограм задовольняє всім вимогам умови задачі. Розв'язання завершено повністю.

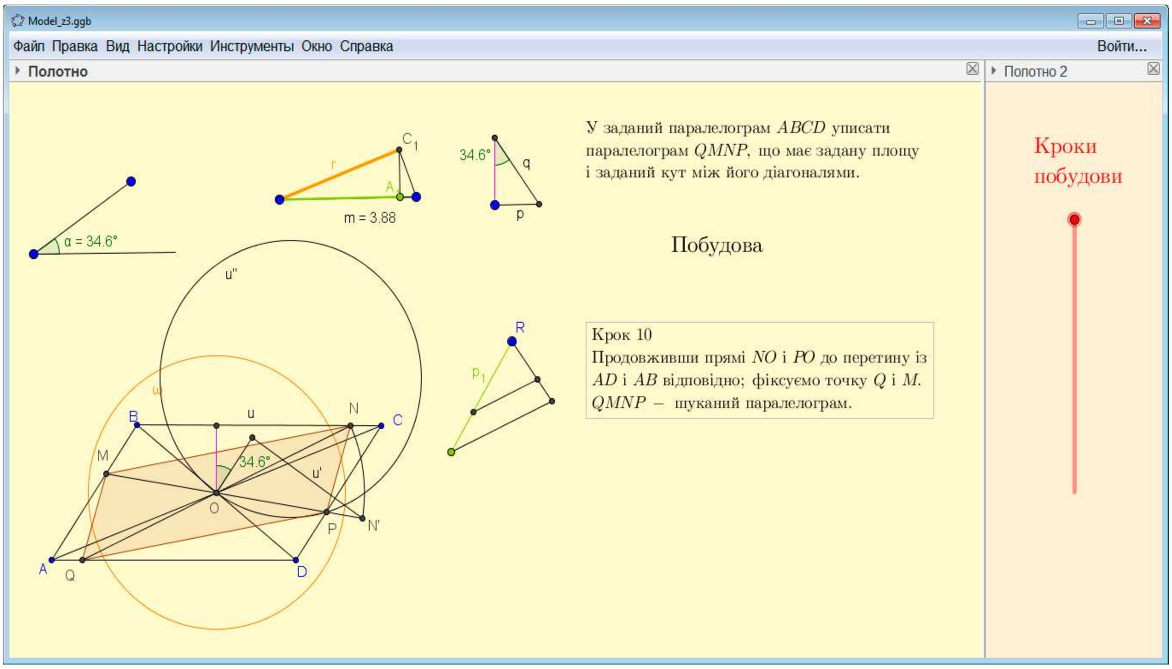

Рис. 15. Фрагмент зображення GeoGebra до задачі № 3

Задача 4. *Через дві задані точки A і B провести коло, ортогональне заданому колу* ω(*O*, *r*).

Аналіз. Нехай рисунок 16 задовольняє умову задачі. Якщо задане коло ω(*O*, *r*) обрати базовим в інверсії, шукане коло **Г** в такому перетворенні перейде в себе, а образи *A′* і *B′* точок *A* і *B* лежатимуть на **Г** (теореми 3, 4). Проте усяке коло цілком визначається трьома своїми точками. Дві його точки *A* і *B* задані умовою, за третьою можна взяти, наприклад, точку *A′* (*A*→*A′*). Аналіз закінчено.

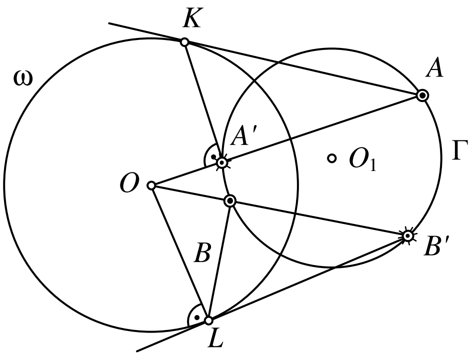

Рис. 16

Побудова. **1**. Будуємо точку *A′* інверсну точці *A* відносно кола ω. **2**. Через три точки *A*, *B* і *A′* проводимо коло **Г**.

Доведення випливає прямо з аналізу та побудови.

Дослідження. Цікавим є випадок, коли точки *A*, *B* і *O* лежать на одній прямій. Якщо в цій ситуації одна із заданих точок (приміром *A*) належить колу інверсії, то *A*≡*A′*, й тоді аналогічні побудови потрібно провести стосовно точки *B*. Коли ж обидві точки лежать на колі інверсії, то в цій ситуації варто в заданих точках *A* і *B* побудувати до кола інверсії ω дві дотичні та зафіксувати їх точку перетину O_1 – центр шуканого кола Г, адже ці кола мають бути ортогональними за умовою.

Цікавим є випадок, коли точки *A*, *B* і *O* лежать на одній прямій. Якщо при цьому точки *A* і *B* не інверсні, то задача *не має* розв’язків. У противному випадку (точки *A* і *B* – взаємно інверсні відносно кола ω), задача матиме *безліч* розв’язків, тобто будь-яке коло, котре проходить через точки *A* і *B*, буде ортогональним до заданого кола ω (наслідок із теореми 4). Задачу розв’язано повністю.

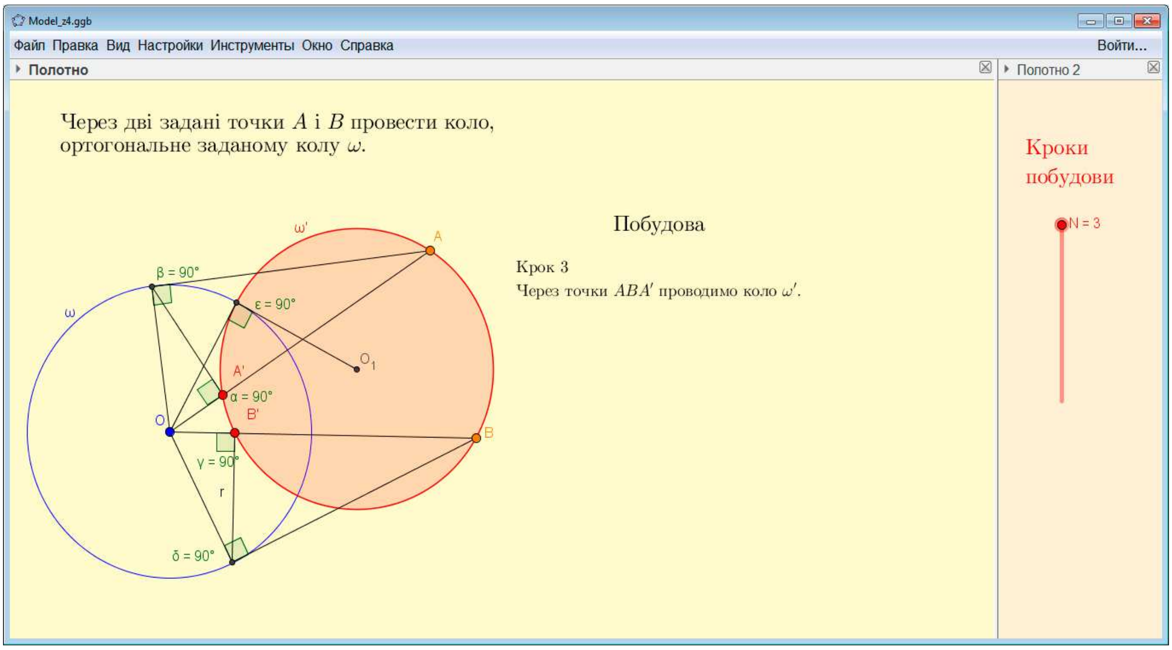

Рис. 16. Фрагмент зображення GeoGebra до задачі № 4

Задача 5. *Через задану точку А провести коло, ортогональне до двох заданих кіл* **Г**$_1$ (O_1, r_1) *і* **Г**$_2$(O_2, r_2).

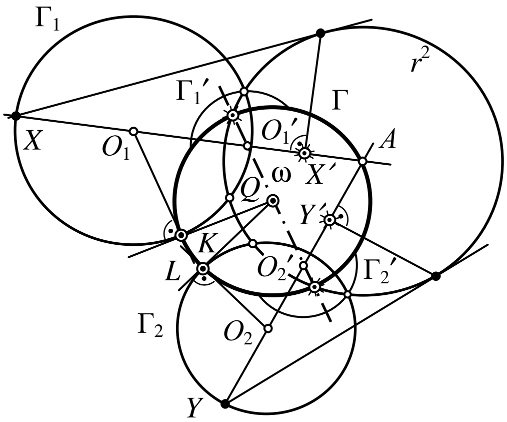

Рис. 17, а

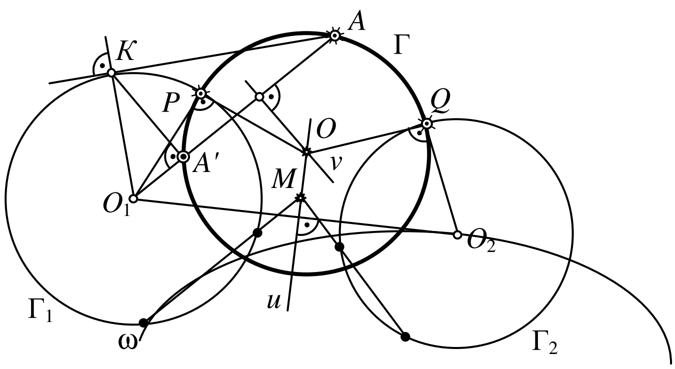

Рис. 17, б

Аналіз. Уявимо, що на рисунку 17, *а* вже зображено коло **Г**, ортогональне до двох заданих кіл **Г**$_1$ і **Г**$_2$. Якщо точку *А* обрати центром інверсії, провівши для зручності базисне коло r^2 так, щоб воно перетинало кожне із заданих кіл у двох точках, то задача зведеться до побудови прямої, перпендикулярної до кіл **Г′**$_1$ та **Г′**$_2$ (частково скритих на зображенні), котрі є образами кіл **Г**$_1$ і **Г**$_2$ у змодельованій інверсії. Залишається лише виконати обернене інверсування прямої лінії ω центрів кіл **Г′**$_1$(O'_1) та **Г′**$_2$(O'_2) (означення перпендикулярності прямої і кола) у шукане коло **Г**. Етап аналізу завершено.

Наразі можливий помітно простіший шлях у реалізації етапу «Побудова» кола **Г**. Відомо, що зовнішня частина радикальної осі відносно двох кіл є геометричним місцем точок – центрів кіл, які перетинають кожне із заданих кіл під прямим кутом [1, с. 77]. Отож, побудувавши радикальну вісь *u* кіл **Г**$_1$ і **Г**$_2$ (1), інверсуємо відносно будь-якого з них (на рисунку 17, *б* – відносно $\mathbf{\Gamma}_1$) точку A в точку A' ($A \to A'$; 2). Згідно з висновком теореми 4, будь-яке коло, котре проходить через пару відповідних точок у такому перетворенні, ортогональне до кола інверсії (5), тому його центр належить (крім радикальної осі u) ще й серединному перпендикуляру p відрізка AA' (3): $O=p\cap u$ (4). Аналіз закінчено.

Як у попередній задачі, *доведення* випливає прямо з аналізу та побудови.

Елементарні, логічно прості міркування (дивись задачу 4) посприяють проведенню *дослідження* в самостійному режимі.

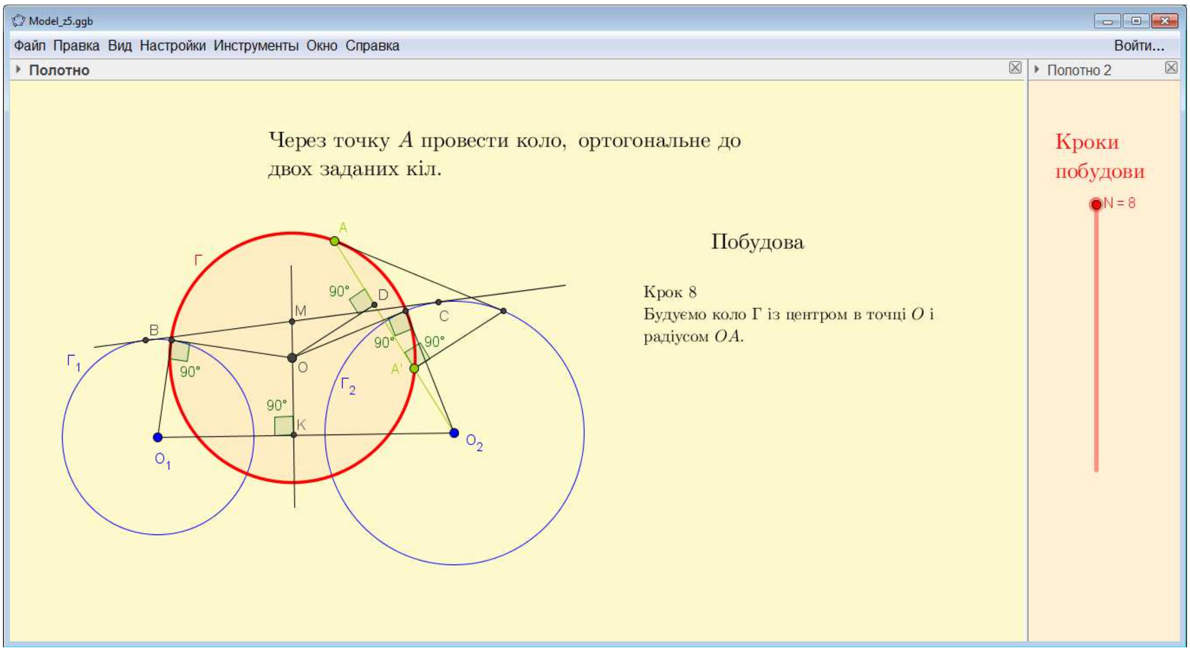

Рис. 17. Фрагмент зображення GeoGebra до задачі № 5

4. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Зазначимо, що *мистецтво* розв'язувати конструктивні задачі містить, головним чином, такі складові: уміння моделювати геометричні ситуації та читати вже виконане креслення; винахідливість у проведенні на зображенні саме тих допоміжних ліній, які сприяють конструюванню алгоритму відшукання розв'язку (інтуїція, досвід у виконанні доречних добудов); достатній багаж знань й умінь використовувати різні методи. За умови, що учень настирливо вчиться цьому мистецтву, розв'язує якомога більше задач на побудову, в нього розвивається винахідливість вищого порядку – вміння грамотно застосовувати геометричні ідеї того чи іншого методу.

Перетворення фігур у планіметрії методом інверсії є одним із потужних, найбільш привабливих в естетичному плані засобів навчально-творчої діяльності особи, що здобуває навички наочно-образного і логічного мислення шляхом розв'язування різнохарактерних пропозицій на основі конструктивного підходу. Це перетворення ввійшло в освітянську практику для розв'язування задач, що не піддаються розв'язанню відомими методами, лише у 30-х рр. XIX століття. Даний метод зорієнтований на генерування та пошук ідей вирішення оригінальних задач в нових, неочікуваних напрямах, частіше за все, навіть, у чомусь суперечливих традиційним прийомам і переконанням, котрі диктуються вже набутим попереднім досвідом. Метод по праву визнано одним із найбільш ефективних серед методів вирішення планіметричних завдань побудовного характеру, які відіграють надто серйозну роль у професійній математичній підготовці вчителя в педагогічних університетах держави Україна.

Беззаперечними перевагами методу інверсії є те, що він сприяє розвитку діалектики мислення учнів, дозволяє відшукувати вихід із, здавалося б, безвихідної ситуації, бачити оригінальні, часом вельми несподівані, фантастичні вирішення багатьох різного рівня складності і проблемності задач «із родзинкою». Його «недоліками» і обмеженнями є те, що метод вимагає від суб'єкта освітнього процесу достатньо високого рівня творчих здібностей, глибоких теоретичних знань, умінь візуальної перетворювальної діяльності з фігурами геометрії.

«В основу інформатизації навчального процесу слід покласти створення і широке впровадження в повсякденну педагогічну практику нових комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання всіх без винятку дисциплін на принципах поступового і неантагоністичного, без руйнівних перебудов і реформ, вбудовування інформаційно-комунікаційних технологій у діючі дидактичні системи, гармонійного поєднання традиційних і комп'ютерно-орієнтованих технологій навчання, не заперечування і відкидання здобутків педагогічної науки минулого, а, навпаки, їх удосконалення і посилення, у тому числі й за рахунок використання досягнень у розвитку комп'ютерної техніки і засобів зв'язку» [4, с. 4].

Постановку навчання планіметрії у ВПНЗ з використанням нелінійних перетворень конформної геометрії та виваженого впровадження сучасних ППЗ у комп'ютерному поданні задач на побудову безсумнівно потрібно вітати, оскільки це – інноваційний напрям роботи зі студентами. При тому задачам на прямі та кола в їх взаємних розташуваннях, дотиках і перетинах, з'ясуванні метричних характеристик різних фігур належить одне із провідних місць. Такі та схожі до них операції з природно «близькими» людині об'єктами у здобутті навичок предметного моделювання варті пильної уваги ще й тому, що у своїй переважній більшості вони мають практичний, прикладний характер.

Перспективними вбачаються дослідження, тісно пов'язані з типізацією задач на метод інверсії, їх комп'ютеризацією за типами та грамотним розробленням єдиного навчально-методичного комплексу з теми «Перетворення фігур у задачах на побудову», узгодженого з програмою курсу геометрії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аргунов Б. И. Геометрические построения на плоскости: Пособ. для студентов ПИ / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – М.: ГУПИ МП РСФСР, 1957. – 268 с.
2. Биков В. Ю. Вивчення перетворення інверсії на основі дослідницького підходу у навчанні з використанням пакета DG / В. Ю. Биков, С. А. Раков. // Інформаційні технології і засоби навчання: Зб. наук. праць / За ред. В. Ю. Бикова, Ю. О. Жука / Інститут засобів навчання АПН України. – К.: Атіка, 2005. – 272с., с. 15 – 28.
3. Боравльов А. П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Навч. посіб. для студентів математ. спец-тей ВПНЗ / А. П. Боравльов, І. Г. Ленчук. – К.: Вища школа, 2002. – 194 с.
4. Жалдак М. І. Використання комп'ютера в навчальному процесі має бути педагогічно виваженим і доцільним / М. І. Жалдак // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2011. – № 3. – С. 3-12.
5. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. – К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004. – 168 с.
6. Зеленяк О. П. Компьютерное моделирование в геометрии / О. П. Зеленяк // Информатика и образование. – 2007. – № 5. – С. 40–50; № 6. – С. 114–119; № 7. – С. 47–55.
7. Ленчук І. Г. Технологія типізації та комп'ютерного моделювання конструктивних задач планіметрії [Електронний ресурс] / І. Г. Ленчук, А. Ц. Франовський // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2013. – № 6 (38). – Режим доступу: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/955/704

8. Ленчук І. Г. Системний підхід у навчанні планіметричним побудовам: Навч.-метод. посібник для студентів спеціальності «Педагогіка і методика СО. Математика» / І. Г. Ленчук. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2006. – 154 с.
9. Ленчук І. Г. Типізація і комп'ютерне моделювання конструктивних задач планіметрії: метод кіл [Електронний ресурс] / Ленчук Іван Григорович, Франовський Анатолій Цезарович// Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – № 1 (39). – Режим доступу: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/974/728
10. Раков С. А. Компьютерные эксперименты в геометрии: Учеб. пособие для учащихся по курсу геометрии / С. А. Раков, В. П. Горох. – Харків: *РЦНИТ, 1996. – 176 с.*
11. Раков С. А. Вивчення геометрії на основі дослідницького підходу з використанням пакета динамічної геометрії DG / С. А. Раков // Математика в школі. – 2005. – № 7. – С. 2-9.
12. Спірін О. М. Критерії і показники якості інформаційно-комунікаційних технологій навчання [Електронний ресурс] / Спірін Олег Михайлович // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2013. – №1 (33). – Режим доступу: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/788/594
13. Яглом И. М. Геометрические преобразования // Часть I //Движения и преобразования подобия // библиотека математического кружка // Вып. 7. М.: Гос. Издательство технико-теоретической литературы, 1953.- 284 с.
14. Яглом И. М. Геометрические преобразования // Часть II // Линейные и круговые преобразования // Библиотека математического кружка // Вып. 8. – М.: Гос. Издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 612 с.
15. Ясінський В. Симетрія відносно кола або інверсія / В. Ясінський, А. Воєвода. // Математика в школі – 2008. – №3. – С. 33-37.

Матеріал надійшов до редакції 29.09.2016 р.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПЛАНИМЕТРИИ: МЕТОД ИНВЕРСИИ

Ленчук Иван Григорьевич
доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры обучения математики, физики и информатики
Житомирский государственный университет, г. Житомир, Украина
lench456@gmail.com

Франовский Анатолий Цезарович
кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета
Житомирский государственный университет, г. Житомир, Украина
integral52@mail.ru

Аннотация. В статье актуализируется проблема изучения преобразований геометрических фигур в планиметрии и эффективного, экономного во времени визуального представления студентами педагогических университетов (учениками ООУЗ – в классах с углубленным изучением математики) на экранах дисплеев современных ПК алгоритмов пошаговых решений задач на построение «круговым» методом инверсии. Раньше разработанные ППС (в частности, программное средство GeoGebra) гарантируют оптимальное качество визуализации вопросов теории преобразования «Инверсия» и хода моделирования разных изображаемых ситуаций, а их динамические характеристики и заложенные конструктивные возможности – высокоточное, зрительно понятное наглядно-образное проведение этапов «анализ» и «построение» в задачах.

Ключевые слова: построение; конструктивная планиметрия; инверсия; анализ; моделирование; компьютер; педагогические программные средства; технология обучения.

COMPUTER MODELING OF PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY: THE INVERSION METHOD

Ivan G. Lenchuk
Doctor of pedagogical sciences, Professor, Professor of education in Mathematics, Physics and Informatics
Zhytomyr State University, Zhytomyr, Ukraine
email@email.com

Anatolyii Ts. Franovskyi
Physical and Mathematical sciences, Associate Professor, Deccan of the Faculty of Physics and Mathematics
Zhytomyr State University, Zhytomyr, Ukraine
email@email.com

Abstract. The article actualizes the problem of studying the transformations of geometric shapes in plane geometry and an effective, economical time visual representation of students of pedagogical universities (students of secondary schools - in classes with profound study of mathematics) on modern PC displays screens algorithms step by step tasks on the construction of the "circular" by inversion . Previously developed educational software (partially, the software GeoGebra) guarantees optimal quality rendering problems in the theory transformation "Inversion" and simulation of different visual situations and their dynamics and the structural features - precision, visibly clear visual-figurative of steps "analysis" and "building" in problems.

Keywords: construction; constructive planimetry; inversion; analysis; modeling; a computer; educational software; learning technology.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

1. Argunov B. I. Geometric construction of the plane: A Handbook for students of pedagogical institutes / B. I. Argunov, M. V. Balk. – M. : GUPI MP RSFSR, 1957. – 268 p. (in Russian)
2. Bykov V. Yu. The study of the transformation of inversion based research approach in studies using packet DG / V. Yu. Bykov, S. A. Rakov. // Information technologies and means of teaching: Collected Works / Edited by V. Yu. Bykov, Yu. O. Guk / Institute training facilities APS of Ukraine. – K: Atika, 2005. – 272 p. – P. 15–28. (in Ukrainian)
3. Boravlov A. P. The analysis in solving problems in construction: manual for students mathematical specialties VPNZ / A. P. Boravlov, I. G. Lenchuk. – K. : High school, 2002. – 191 p. (in Ukrainian)
4. Zhaldak M. I. Using the computer in the classroom should be well thought out and pedagogically appropriate / M. I. Zhaldak // Computer for school and family. – 2011. – № 3. – P. 3–12. (in Ukrainian)
5. Zhaldak M. I. Computer lessons in geometry: Manual for teachers / M. I. Zhaldak, O. V. Vityuk. – K. : RNNTS "DINIT", 2004. – 168 p. (in Ukrainian)
6. Zeleniak O. P. Computer modeling in geometry / O. P. Zeleniak // Information and education. – 2007. – № 5. – P. 40–50; № 6. – P. 114–119; № 7. – P. 47–55. (in Russian)
7. Lenchuk I. G. Technology typing and computer simulation design tasks planimetry [online] / I. G. Lenchuk, A. Ts. Franovskii // Information technology and learning tools. – 2013. – № 6 (38). – Available from: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/955. (in Ukrainian)
8. Lenchuk I. G. System approach in training drew Built: Textbook for students of specialty "Pedagogy and methodology of secondary education. Mathematics" / I.G. Lenchuk. – Zhytomyr : Publisher Zhytomyr Ivan Franko State University, 2006. – 154 p. (in Ukrainian)
9. Lenchuk I. G. Typification computer modeling and design tasks plane geometry: circles method [online] / Lenchuk Ivan Grygorovych, Franovskii Anatolii Tsezarovych // Information technologies and learning tools. – 2014. – № 1 (39). – Available from: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/974. (in Ukrainian)
10. Rakov S. A. Computer experiments in geometry: Textbook for students of the course geometry / S. A. Rakov, V. P. Goroh. – Kharkov: Publishing Kharkov State Pedagogical University named after G. S. Skovoroda, 1996. – 176 p. (in Russian)
11. Rakov S. A. The Study of geometry-based research approach, using a dynamic geometry package DG / S. A. Rakov // Mathematics at school. – 2005. – No. 7. – P. 2–9. (in Ukrainian)

12. Spirin O. M. Criteria and indicators of the quality of information and communication technology training [online] / O. M. Spirin // Information technologies and learning tools. – 2013. – №1 (33). – Available from: http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/788. (in Ukrainian)
13. Yaglom I. M. Geometric transformations // Part I // Motion and similarity transformations // Library of the mathematical circle // Vol. 7. – Moscow : State Publishing House technical and theoretical literature, 1953. – 284 p. (in Russian)
14. Yaglom I. M. Geometric transformations // Part II // Linear and circular transformation // Library of the mathematical circle // Vol. 8. – Moscow : State Publishing House technical and theoretical literature, 1956. – 612 p. (in Russian)
15. Yasinskii V. The symmetry with respect to a circle or inversion / V. Yasinskii, A. Voievoda // Mathematics in school. – 2008. – No. 3. – P. 33–37. (in Ukrainian)

Conflict of interest. The authors have declared no conflict of interest.