

УДК 372.851

Ботузова Юлія Володимирівна

кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка,

м. Кропивницький, Україна

ORCID ID 0000-0002-1313-0010

vassalatii@gmail.com

ДОСВІД ВИКОРИСТАННЯ ЗАСОБІВ ІКТ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Анотація. У статті висвітлено практичний досвід використання різних засобів ІКТ у навчанні математичного аналізу студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів. Виділяється ряд проблем, які виникають у процесі впровадження ІКТ при вивченні математичного аналізу, зокрема: наявність доступного програмного забезпечення; відсутність сформованих навичок користування ІКТ у студентів; використання студентами смартфонів не в навчальних цілях; невідповідність педагогів до широкого впровадження ІКТ у навчальний процес; відсутність методичної та навчальної літератури. Описано методичний підхід до викладання математичного аналізу, який передбачає використання засобів ІКТ на лекційних та практичних заняттях, зокрема таких як GeoGebra, математичний пакет Maple, Wolfram|Alpha, різні онлайн-калькулятори, мобільний додаток MalMath. Наведено детальні приклади використання в навчальному процесі зазначених ІКТ. Продемонстровано використання на лекційному занятті динамічної моделі GeoGebra, яка дозволяє здійснити невеликий навчальний експеримент та проілюструвати геометричний зміст теореми Лагранжа про скінченні природи. На практичних заняттях запропоновано використовувати ІКТ як засобів для перевірки самостійно отриманих розв'язків або як засобів для виконання проміжних обчислень. Також наведено приклади розв'язання задачі на розвинення функції в ряд Тейлора за допомогою Wolfram|Alpha, різних онлайн-калькуляторів та Maple. Вказано на доцільність використання цих засобів з метою виконання перевірки самостійно отриманих розв'язків. Запропоновано також приклад використання мобільного додатка MalMath для виконання проміжних обчислень в задачі на дослідження збіжності знакозмінного ряду. Представлені результати опитування викладачів та студентів, які були проведені в процесі здійснення дослідження, на підставі яких зроблено висновки щодо ефективності та необхідності використання ІКТ при вивченні математичних дисциплін. Також виділено ряд психолого-педагогічних проблем при застосуванні ІКТ у навчанні, зокрема: неможливість для викладача визначити рівень самостійності студентів при виконанні ними індивідуальних домашніх робіт; технологічні проблеми, які можуть виникати на заняттях чи вдома через застарілість техніки, відсутність мережі Інтернет чи недостатню його швидкість тощо.

Ключові слова: математичний аналіз; ІКТ; мобільні технології; онлайн-сервіси; методика викладання математичних дисциплін.

1. ВСТУП

Постановка проблеми. Стрімкий розвиток інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у світі накладає свій відбиток на всі сфери соціально-економічного життя, а отже, і на сферу освіти. З появою перших електронних обчислювальних машин, а згодом і комп'ютерів, методичні підходи до навчання почали змінюватись. Ці зміни стосувались, насамперед, природничих дисциплін, вивчення яких безпосередньо пов'язане з обчислювальними задачами. Постійна модернізація та вдосконалення ІКТ сприяє появі нових досліджень, ефективності використання цих технологій у різних ланках освітнього процесу.

Що стосується вищої освіти в Україні, то залишається актуальною проблема технічного оснащення навчального процесу, або так званої комп'ютеризації. На даний момент ЗВО потребують достатньої кількості обладнаних комп'ютерних лабораторій, лекційних аудиторій з мультимедійними проєкторами, налаштовану для вільного доступу мережу Wi-Fi. У той же час більшість студентів мають власні сучасні смартфони, планшети, ноутбуки з підключенням до мережі Інтернет.

У Національній стратегії розвитку освіти в Україні на 2012-2021 роки [1] зазначається, що «пріоритетом розвитку освіти є впровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій, що забезпечують удосконалення навчально-виховного процесу, доступність та ефективність освіти, підготовку молодого покоління до життєдіяльності в інформаційному суспільстві». Серед заходів, що спрямовані на забезпечення інформатизації освіти, передбачаються наступні: створення інформаційної системи підтримки освітнього процесу, спрямованої на реалізацію її основних функцій (забезпечення навчання, соціалізацію, внутрішній контроль за виконанням освітніх стандартів тощо); стовідсоткове забезпечення навчальними комп'ютерними комплексами освітніх закладів, зокрема закладів вищої освіти; забезпечення освітнього процесу засобами ІКТ; доступ закладів освіти до світових інформаційних ресурсів тощо.

Тому зараз постає питання ефективної організації навчання з використанням ІКТ, переосмислення та вдосконалення існуючих методичних підходів, відбору змісту навчального матеріалу тощо. У той самий час відбувається суттєве скорочення кількості аудиторних годин, відведених на вивчення навчальних дисциплін, зокрема і «Математичного аналізу». Це призводить до появи невідповідності між обсягом навчального матеріалу, який необхідний для ефективного засвоєння дисципліни, та обмеженістю часу, що відводиться на її вивчення. Одним із шляхів подолання цієї проблеми є впровадження на різних за змістом та організацією навчальних заняттях ІКТ, які повинні проводитись у комплексі з розробкою відповідного методичного забезпечення [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні існує вже чимала кількість наукових робіт, присвячених використанню ІКТ під час вивчення математичних дисциплін як у школі, так і в ЗВО. Знайомство з працями таких авторів, як В. П. Беспалько, В. Г. Болтянський, Є. Ф. Вінниченко, В. О. Далінгер, М. І. Жалдак, В. П. Зінченко, Е. І. Кузнецов, М. П. Лапчик, Ю. І. Машбиць, Н. В. Морзе, О. О. Ракітіна, С. А. Раков, С. О. Семеріков, Н. Ф. Тализіна, Ю. В. Триус дозволяє зорієнтуватись у сучасних теоретичних й методичних засадах застосування ІКТ у навчальному процесі, зокрема при вивченні математичних дисциплін. У дослідженнях В. І. Вершиніна, Ю. П. Дубенського, Н. Р. Жарової, Н. А. Ждан, Є. В. Клименка та ін. піднімаються питання інтенсифікації навчання у ЗВО за рахунок удосконалення змісту навчального матеріалу та методів навчання. Про різні аспекти навчання окремим розділам математичного аналізу з використанням ІКТ йдеться в роботах З. В. Бондаренко, В. І. Клочка, Г. О. Михаліна, М. І. Шкіля. Сучасний стан та перспективи розвитку мобільних математичних середовищ, а також теоретичні та методичні аспекти використання мобільних ІКТ при вивченні математичних дисциплін детально представлені в дослідженнях М. А. Кислової, К. І. Словак, Н. В. Рашевської, Ю. В. Триуса, С. О. Семерікова.

Незважаючи на чималу кількість робіт, присвячених використанню різноманітних ІКТ математичного призначення, проблема теорії й методики їх використання в освіті є розробленою недостатньо і вимагає постійного дослідження, адже з плином часу засоби ІКТ кількісно збільшуються та якісно змінюються.

Мета статті – описати досвід використання ІКТ у процесі вивчення математичного аналізу, зокрема розділу «Ряди», в педагогічному університеті.

2. МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

Для досягнення поставленої мети та завдань дослідження використовувались теоретичні методи: аналіз сучасних наукових, методичних, психолого-педагогічних досліджень та публікацій за вказаними вище напрямками; аналіз освітніх стандартів і програм професійної та практичної підготовки студентів педагогічних спеціальностей, навчальної літератури та робочих програм з математичного аналізу; узагальнення досвіду роботи викладачів математичного аналізу та методистів, а також власного досвіду викладання математичного аналізу в педагогічному університеті; емпіричні методи: здійснення спостереження за особливостями навчального процесу, співбесіди зі студентами та викладачами, експериментальне застосування методики використання ІКТ при вивченні математичного аналізу.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ

3.1. Теоретична частина дослідження

Математичний аналіз – це частина математики, у якій функція та її узагальнення вивчаються методом границь. Математичний аналіз разом із алгеброю утворюють «ту кореневу систему, на якій тримається розгалужене дерево сучасної математики і через яку здійснюється його життєдайний контакт з нематематичним світом» [3].

Курс математичного аналізу є традиційним для вивчення в педагогічному університеті. Він займає важливе місце в професійній підготовці майбутніх учителів математики. За діючими навчальними планами у ЦДПУ ім. В. Винниченка навчальна дисципліна «Математичний аналіз» вивчається протягом п'яти семестрів, починаючи з першого курсу. Упродовж цього часу студенти мають опанувати такі розділи математичного аналізу: границя та неперервність функції однієї змінної; диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної; ряди; диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних; основи векторного та функціонального аналізу; комплексний аналіз; диференціальні рівняння.

Вивчення та узагальнення багаторічного педагогічного досвіду викладачів математичних дисциплін дозволяє стверджувати, що студенти молодших курсів зазвичай стикаються з труднощами в навчанні, які з'являються внаслідок відсутності необхідної практики в розв'язуванні задач, а пізніше – з обсягом інформації, який необхідно сприйняти та засвоїти.

Практично всі дослідники проблем вивчення та викладання математичних дисциплін зазначають, що для подолання негативних явищ в умовах інформаційного суспільства необхідне обґрунтування, створення та широке впровадження в повсякденну педагогічну практику інноваційних ІКТ навчання математичних дисциплін у ЗВО [4]. Проведені дослідження показують, що використання ІКТ надає можливість активізувати навчально-пізнавальну і науково-дослідну діяльність студентів, підвищити рівень їхньої математичної і професійної підготовки, розкрити творчий потенціал і збільшити роль самостійної та індивідуальної роботи [4].

Але в той же час ідеалізувати обчислювальні можливості ІКТ та спиратись лише на них не можна. Ще наприкінці ХХ століття, коли науковці могли лише уявити, якими можуть бути функціональні обчислювальні можливості сучасних комп'ютерів, у вступі

до підручника з математичного аналізу [3] йшлося про те, що незважаючи на появу швидкодіючих обчислювальних машин, не варто нехтувати володінням математичними методами дослідження. А для того, щоб успішно застосовувати математичні методи на практиці, необхідно передусім уміти правильно застосовувати математичний апарат, знати межі допустимого використання математичної моделі. Для правильної постановки задачі, для оцінки її даних та виділення суттєвих із них, для вибору способу вирішення задачі необхідно володіти ще й математичною інтуїцією, фантазією, почуттям гармонії, що дозволяє передбачити потрібний результат перед тим, як він буде отриманий.

Підсумовуючи вищесказане, доходимо висновку, що серед невирішених завдань у навчанні математичних дисциплін у ЗВО є – формування в студентів стійких знань, умінь та навичок використання ІКТ, які надають можливість розв'язувати математичні задачі різного рівня складності. Але, попри це, майбутній фахівець має бути готовим не просто ввести дані задачі в програмний засіб з клавіатури, а й керувати роботою комп'ютера, контролювати процес розв'язання, прогнозувати можливу відповідь, за потреби корегувати отримані результати.

Це означає, що традиційний курс математичного аналізу не потрібно повністю змінювати, а варто лише підкріпити відповідним методичним супроводом. Ми пропонуємо розглянути деякі способи використання ІКТ на лекційних та практичних заняттях, що дозволить викладачу охопити більший обсяг матеріалу, а студентам глибше зрозуміти й засвоїти навчальний матеріал.

Звичайно, існує цілий ряд проблем, з якими можна стикнутись, розпочавши впровадження ІКТ у процес навчання математичного аналізу.

По-перше, ліцензовані версії комп'ютерних математичних пакетів коштують дуже дорого, тому не всі студенти в змозі їх придбати для роботи вдома. Хоча цієї проблеми можна позбутись, якщо користуватися програмами, що встановлені в комп'ютерних лабораторіях ЗВО, або замінити їх на безкоштовні (але не менш потужні) онлайн-сервіси.

По-друге, використання математичних пакетів та мобільних додатків передбачає вивчення інтерфейсу, правил роботи в програмі, особливостей введення вихідних даних та виводу результатів. У курсі інформатики, на жаль, математичні пакети в достатньому обсязі не вивчаються, а в інших дисциплінах часу на це майже не виділяється. Достатньо часто студенти виявляються безпорадними, коли постає необхідність застосування комп'ютерних технологій на практиці, тому без відповідного методичного супроводу не обійтись.

По-третє, організація навчання математичного аналізу з використанням мобільних додатків для виконання необхідних обчислень інколи призводить до того, що студенти частіше відволікаються на використання мобільного пристрою як розваги – соціальні мережі, обмін повідомленнями, ігри тощо. Також поряд з широкими можливостями застосування мобільних технологій доцільно відзначити деякі перешкоди щодо їх використання. Зокрема це стосується програмно-апаратної частини, а саме: невеликі розміри екрану обмежують тип і кількість інформації, яка може бути відображена (хоча це можна інтерпретувати як перевагу, оскільки кількість інформації повинна бути дозованою і людина краще запам'ятовує інформацію, яка відображена в невеликій кількості); обмежений розмір пам'яті телефону, тому не весь навчальний контент можна зберегти (розв'язати проблему можна частково розміщуючи навчальні ресурси в хмарі); ресурс акумулятора смартфона швидко витрачається, тому потрібно передбачити можливість підзарядки пристрою, у разі його виснаження; зниження пропускної здатності мережі за одночасного використання мобільних пристроїв великою кількістю користувачів; низька швидкість передавання даних засобами

мобільного зв'язку; не всі програмні засоби можуть бути реалізовані й ефективно використані в мобільному телефоні [5].

По-четверте, виникає питання відсутності необхідної кваліфікації у викладачів. Щоб її вирішити достатньо на факультеті організувати курси підвищення кваліфікації викладачів математичних дисциплін.

Ще однією проблемою у викладанні математичних дисциплін з використанням ІКТ є недостатній їх методичний супровід. В Інтернеті можна знайти у вільному доступі матеріали, що описують функціональні можливості математичних пакетів та онлайн-ресурсів з прикладами з різноманітних галузей знань. Але дуже мало посібників, які можна використовувати як навчальну та методичну літературу для окремих курсів і дисциплін у процесі навчання у ЗВО, бо складність роботи в програмному середовищі повинна відповідати поставленим задачам. Окрім того майже відсутні інформаційні ресурси з алгоритмами використання мобільних додатків, які також мають значні функціональні можливості щодо обчислювальних операцій та вирішення задач з математичного аналізу.

Тому нами було підготовлено, апробовано та опубліковано два навчальних посібники [6], [7], що містять розробки практичних занять із використанням ІКТ з таких розділів математичного аналізу, як: «Ряди» та «Диференціальне числення функції кількох змінних». Головна ціль цих посібників – виробити стійкі навички використання комп'ютерів та мобільних пристроїв з математичним програмним забезпеченням, а також Інтернет-ресурсів для здійснення математичних досліджень та розв'язання складних задач. Особливістю посібників є те, що після кожного практичного заняття пропонуються методичні рекомендації щодо використання ІКТ під час розв'язання наведених задач. Дані посібники адаптовані до умов навчання студентів педагогічних спеціальностей, мають інтегрований характер та спрямовані на покращення результативності їх самостійної роботи, яка на сьогодні є важливою складовою освітнього процесу.

Сьогодні існує дуже багато комп'ютерних програм для розв'язування математичних задач. Вони відрізняються кількістю здійснюваних ними операцій, графічними можливостями, якістю та зручністю інтерфейсу, можливістю обміну даними з іншими пакетами, областю застосування та іншими характеристиками. У нашому дослідженні використовуються такі програмні засоби та онлайн-ресурси: математичний пакет Maple, Geogebra (онлайн та офлайн версії), Wolfram|Alpha, мобільний додаток MalMath, а також онлайн-калькулятори matcabi.net, kontrolnaya-rabota.ru та багато інших, що знаходяться у вільному доступі та є безкоштовними.

Взагалі методичний підхід до викладання математичного аналізу з використанням ІКТ передбачає, що лекційні заняття викладач вибудовує таким чином, щоб постійно ілюструвати означення, доведення теорем за допомогою програмних засобів, а також за їх допомогою перевіряти розв'язані приклади чи виконувати проміжні обчислення в складних задачах. Одночасно із сприйняттям та осмисленням теоретичного матеріалу студенти також сприймають функціональні можливості програмних засобів, які демонструє їм викладач. На практичних заняттях зі студентами першого курсу викладач намагається сформулювати в них уміння використовувати математичні програмні засоби та мобільні додатки для перевірки отриманих розв'язків, при цьому керує їхніми діями, надаючи чіткі алгоритми роботи з ІКТ. На старших курсах, коли вже певні вміння сформовані, студенти частіше звертаються до ІКТ, зокрема для виконання проміжних дій, що містяться в задачах. Такий підхід дозволяє зекономити обмежений навчальний час та виконати більшу кількість різноманітних задач. Окрім того, викладач може надавати лише рекомендації щодо вибору програмного засобу, чітких алгоритмів студенти вже не потребують.

3.2. Опис досвіду використання ІКТ у процесі навчання математичного аналізу

Наведемо декілька прикладів, які ілюструють застосування вказаного нами методичного підходу до викладання математичного аналізу в педагогічному університеті.

Під час проведення лекційних занять використовується комп'ютер з мультимедійним проектором чи мультимедійна дошка. Викладач, знайомлячи студентів, наприклад, з теоремою Лагранжа про скінченні прирости, може продемонструвати геометричний зміст цієї теореми, скориставшись динамічною моделлю, розробленою в програмі Geogebra (рис.1).

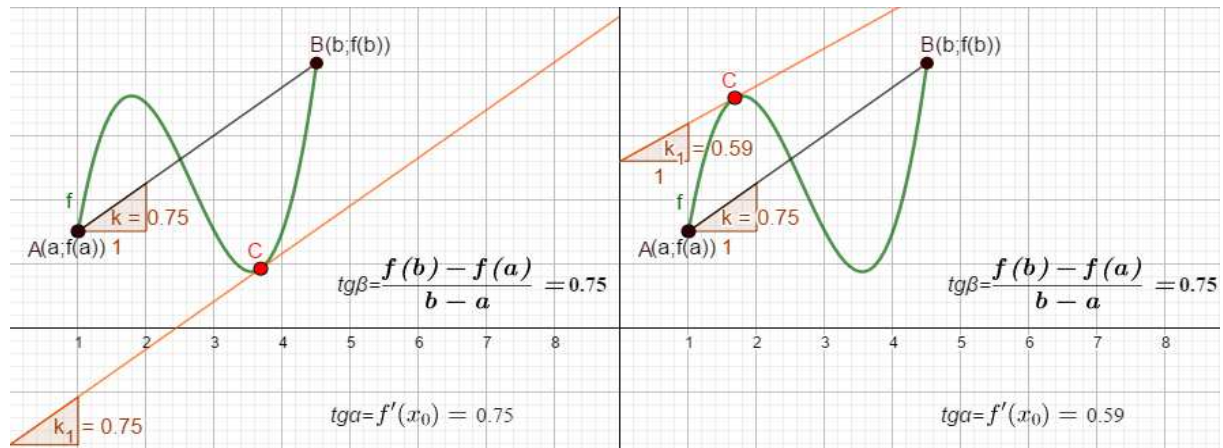


Рис.1. Динамічна модель до теореми Лагранжа в програмі Geogebra

Геометричний зміст теореми Лагранжа полягає в наступному [3]: на деякому відрізку $[a;b]$ задано неперервну функцію $f(x)$, $x_0 \in [a;b]$ та точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$, $C(x_0; f(x_0))$, що належать її графіку; AB – хорда, що з'єднує точки A і B ; у точці C проведена дотична до графіка функції $f(x)$. Тоді $tg\beta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ – тангенс кута нахилу хорди AB до додатного напрямку вісі Ox , $f'(x_0) = tg\alpha$ – тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці $C(x_0; f(x_0))$. Отже, теорема Лагранжа показує, що в заданих умовах теореми повинна знайтись точка $C(x_0; f(x_0))$ (можливо і не одна), у якій дотична до графіка паралельна хорді AB , тобто $tg\alpha = tg\beta$.

У запропонованій динамічній моделі точка C рухається по графіку функції $f(x)$, разом із цим змінюється значення $tg\alpha$, значення $tg\beta$ залишається незмінним. Справа на рис.1. положення точки C на кривій $f(x)$ таке, що $tg\alpha \neq tg\beta$, а зліва – знайдене таке розміщення точки C , щоб виконувалась умова $tg\alpha = tg\beta$. Дана модель надає можливість провести невеликий навчальний експеримент: можна змінювати форму графіка функції $f(x)$; зменшувати чи збільшувати довжину відрізка $[a;b]$; змінювати положення точки C на графіку функції $f(x)$. Завдяки такій наочності студенти краще усвідомлюють та засвоюють матеріал, можуть самостійно дійти висновку, що на відрізку $[a;b]$ обов'язково знайдеться хоча б одна така точка, у якій дотична до кривої $f(x)$ буде паралельною січній AB . Динамічні моделі забезпечують умови для осмислення задач, дослідження закономірностей на основі формування гіпотез з їх наступною експериментальною перевіркою. Тож у студентів з'являються можливості

для здійснення дослідницької та творчої діяльності, що сприяє розвитку пізнавального інтересу тощо [8].

На практичних заняттях пропонуємо використовувати ІКТ як: 1) засоби для перевірки самостійно отриманих розв'язків; 2) засоби для виконання проміжних обчислень.

Наведемо декілька прикладів практичного використання математичного пакету *Maple* та Інтернет-ресурсів. Почнемо з потужної бази знань та обчислювальних алгоритмів *Wolfram|Alpha* [9] і розглянемо її можливості для розв'язання такої задачі: «Розкласти функцію $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$ ». *Wolfram|Alpha* має окрім комп'ютерної версії також і мобільну, тому є дуже зручною у використанні на практичних, лабораторних заняттях, а також незамінна на лекціях.

Для перевірки виконання такої задачі необхідно ввести запит «series 1/x at x=3», як на рис.2. Кількість перших членів ряду, за потреби, можна регулювати записом: «series f(x) order 5». Результат, який виводиться на екран, можна звірити з результатом, отриманим самостійно. Окрім того, використаний обчислювальний алгоритм виводить додаткову інформацію, запиту по якій не робилось, а саме: область збіжності отриманого степеневого ряду – «Taylor series convergence when $\left|1 - \frac{x}{3}\right| < 1$ »; графічне представлення розкладу даної функції в степеневий ряд, яке дозволяє візуально оцінити апроксимацію; представлення функції у вигляді загальної формули ряду (для цього також можна зробити окремий запит «f(x) series representation»).

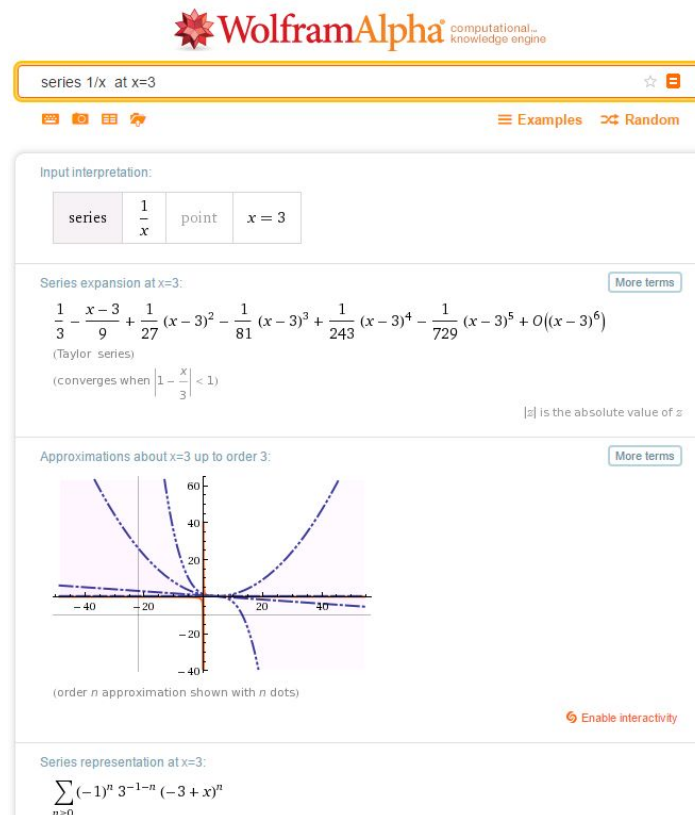


Рис. 2. Розклад функції $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора за допомогою *Wolfram|Alpha*

Розв'язуючи задачу, ми самостійно мали б обчислювати значення функції та її похідних у точці $x_0 = 3$, які є коефіцієнтами розкладу функції в ряд. В *Wolfram|Alpha* є можливість виконати або перевірити виконання таких проміжних дій, вивівши на екран значення необхідної кількості коефіцієнтів степеневому ряду у вигляді таблиці. Для цього в робочий рядок здійснюється запит «Table [d^n/dx^n (1/x)/n!, {n,0,5}]», який виводить 6 коефіцієнтів ряду від $n=0$ до 5. Якщо необхідно отримати значення конкретного коефіцієнту ряду, наприклад 10-ого, то необхідно запит переформулювати у такий спосіб «Table [d^n/dx^n (1/x)/n!, {n,10,10}]» (рис. 3).

Input interpretation:

$$\text{Table}\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{x n!}, \{n, 0, 5\}\right]$$

Result

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--|---------------|------------------|-----------------|------------------|-----------------|------------------|
| $\frac{\partial^n \frac{1}{x n!}}{\partial x^n}$ | $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\frac{1}{x^3}$ | $-\frac{1}{x^4}$ | $\frac{1}{x^5}$ | $-\frac{1}{x^6}$ |

Рис. 3. Знаходження коефіцієнтів розкладу функції $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора за допомогою *Wolfram|Alpha*

Окрім того, можна підставити в знайдені коефіцієнти замість аргументу x його конкретне значення x_0 і в такий спосіб отримати числові значення коефіцієнтів розкладу даної функції в степеневий ряд у заданій точці (рис. 4).

Input:

$$\text{SeriesCoefficient}\left[\frac{1}{x}, \{x, 3, n\}\right]$$

[[t - t₀]](f) is the nth term of the expansion of f at t - t₀

Result:

$$\begin{cases} (-1)^n 3^{-n-1} & n \geq 0 \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

Values: More

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----------------|----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| $\begin{cases} (-1)^n & n \geq 0 \\ 3^{-n-1} & 0 \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$ | $-\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{27}$ | $-\frac{1}{81}$ | $\frac{1}{243}$ | $-\frac{1}{729}$ |
| approximation | -0.111111 | 0.037037 | -0.0123457 | 0.00411523 | -0.00137174 |

Рис. 4. Знаходження коефіцієнтів розкладу функції $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$ за допомогою *Wolfram|Alpha*

Wolfram|Alpha доцільно використовувати на практичних заняттях з математичного аналізу з метою перевірки отриманих розв'язки, або виконання громіздких обчислень, наприклад, обчислення коефіцієнтів розкладу функції в ряд. Окрім того, викладачу варто звернути увагу студентів на синтаксис запису формул, команд, операторів у *Wolfram|Alpha*, провести попередню роз'яснювальну підготовчу роботу.

Продемонструємо роботу інших Інтернет-ресурсів, які пропонують розкласти функцію в ряд Тейлора.

Онлайн-калькулятор «Разложение в ряд Тейлора» [10] видає достатньо лаконічну відповідь (рис. 5), простий у використанні, адже не потребує знань особливого синтаксису запису операторів. Студентам зручно користуватись цим онлайн-калькулятором за потреби здійснення перевірки отриманого розв'язку задачі на практичних заняттях або при виконанні домашніх чи індивідуальних завдань.

Функция $f(x)$?

Разложить в ряд в точке:

Разложить в ряд до члена степени:

Разложить функцию в ряд Тейлора

Вы ввели

$$\frac{1}{x}$$

в точке

$$x = 3$$

до 4-го члена

Быстрый ответ [Текст]

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{27}(x-3)^2 - \frac{1}{81}(x-3)^3 - \frac{x}{9} + \mathcal{O}\left((x-3)^4; x \rightarrow 3\right)$$

Рис. 5. Розклад функції $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$ онлайн-калькулятором «Разложение в ряд Тейлора» (www.kontrolnaya-rabota.ru)

Інші приклади онлайн-калькуляторів для розвинення функції в ряд Тейлора представлено на Інтернет-ресурсах: «Империя чисел – математические утилиты» [11] (рис.6) та «IntegraloFF.NET. Интегралы, производная, дифференциальные уравнения, пределы online» [12] (рис.7). Онлайн-калькулятор «Разложение в ряд Тейлора» [11]

дозволяє отримати розв'язок поставленої задачі без пояснень виконання проміжних дій, має можливість побудувати графік апроксимації функції за допомогою скінченного числа членів ряду Тейлора, а також, за потреби, відредагувати отриманий вираз у форматі LaTeX. Онлайн-калькулятори [10], [11], [12] за функціональністю дуже схожі, їх доцільно використовувати за потреби виконання перевірки одержаних розв'язків. Студентам пропонуємо використовувати один з них на власний розсуд, але знайомимо з двома-трьома для того, щоб уникнути можливих незручностей у разі технічних негараздів на одному з сайтів, або некоректності відображення формул на мобільному пристрої.

Разложения в ряд Тейлора калькулятор

Введите функцию для вычисления её разложения в ряд Тейлора:

1/x

Переменная: Вычислить значение в точке: Степень:

Функция 1/x

$$\frac{1}{3} - \frac{(x-3)}{9} + \frac{(x-3)^2}{27} - \frac{(x-3)^3}{81} + \frac{(x-3)^4}{243} - \frac{(x-3)^5}{729} + \dots$$

[Нарисовать график](#) [Редактировать LaTeX выражение](#) [Прямая ссылка на страницу](#)

Рис. 6. Розклад функції $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$ онлайн-калькулятором «Разложение в ряд Тейлора» (ru.numberempire.com)

Разложения функции в ряд Тейлора

Разложения функции в ряд Тейлора

Раскладываем функцию

$\frac{1}{x}$

в окрестности точки $x_0 = 3$.

Получили:

$$\frac{1}{3} - \frac{(-3+x)}{9} + \frac{(-3+x)^2}{27} - \frac{(-3+x)^3}{81} + \frac{(-3+x)^4}{243} - \frac{(-3+x)^5}{729} + \frac{(-3+x)^6}{2187} - \frac{(-3+x)^7}{6561} + \frac{(-3+x)^8}{19683} - \frac{(-3+x)^9}{59049} + \frac{(-3+x)^{10}}{177147} + O(-3+x)^{11}$$

Рис. 7. Розклад функції $y = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 3$ онлайн-калькулятором «Разложение функции в ряд Тейлора» (<http://integraloff.net>)

Щодо роботи з математичним пакетом *Maple*, то він має вбудовані функції $series(f(x), x = x_0, n)$ та $taylor(f(x), x = x_0, n)$, де n – це число членів ряду. Окрім того, за допомогою функції $seq()$, можна отримати значення послідовних коефіцієнтів ряду (рис. 8).

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$ ». На жаль, додаток MalMath поки що не може безпосередньо порахувати суму ряду чи встановити його розбіжність, але всі проміжні дії в ньому доступні, наприклад, знаходження границь та інтегралів.

У процесі розв'язання поставленої задачі нам необхідно обчислити границю загального члену ряду, складеного з модулів членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$. На рис. 10 показано умову та результат здійснених обчислень в додатку MalMath.

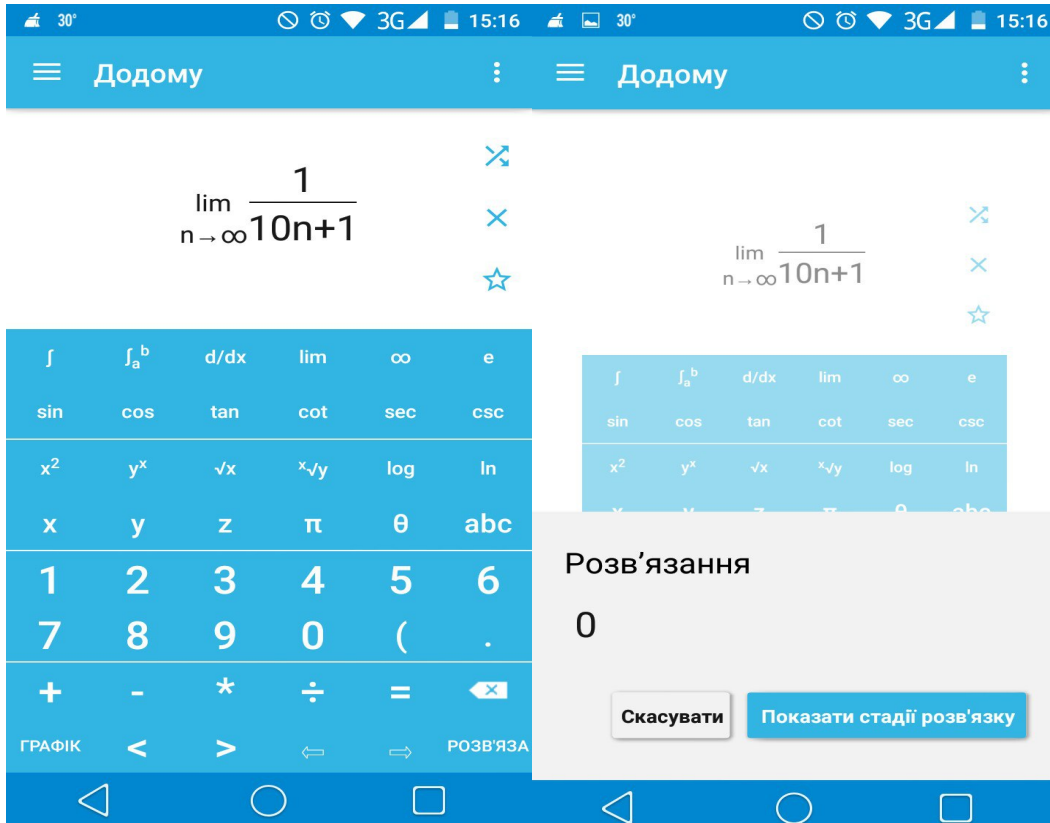


Рис. 10. Умова (зліва) та розв'язок задачі(справа) на екрані програми MalMath

Знайшовши цю границю, встановлюємо виконання необхідної умови збіжності утвореного додатного ряду, а також виконання другої умови ознаки Лейбніца. Далі, щоб встановити характер збіжності знакозмінного ряду, тобто збігається він умовно чи абсолютно, використаємо граничну ознаку порівняння, порівнюючи між собою ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+1} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (\text{гармонійний ряд} - \text{розбіжний}).$$

Отже, за допомогою нашого додатку знайдемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ (рис. 11):

На рис. 11 (справа) тоненькими лініями показано зв'язки між виконаними операціями. Ці зв'язки з'являються після натискання на кнопки з буквою «і», що знаходяться в правій частині екрану з детальним розв'язком.

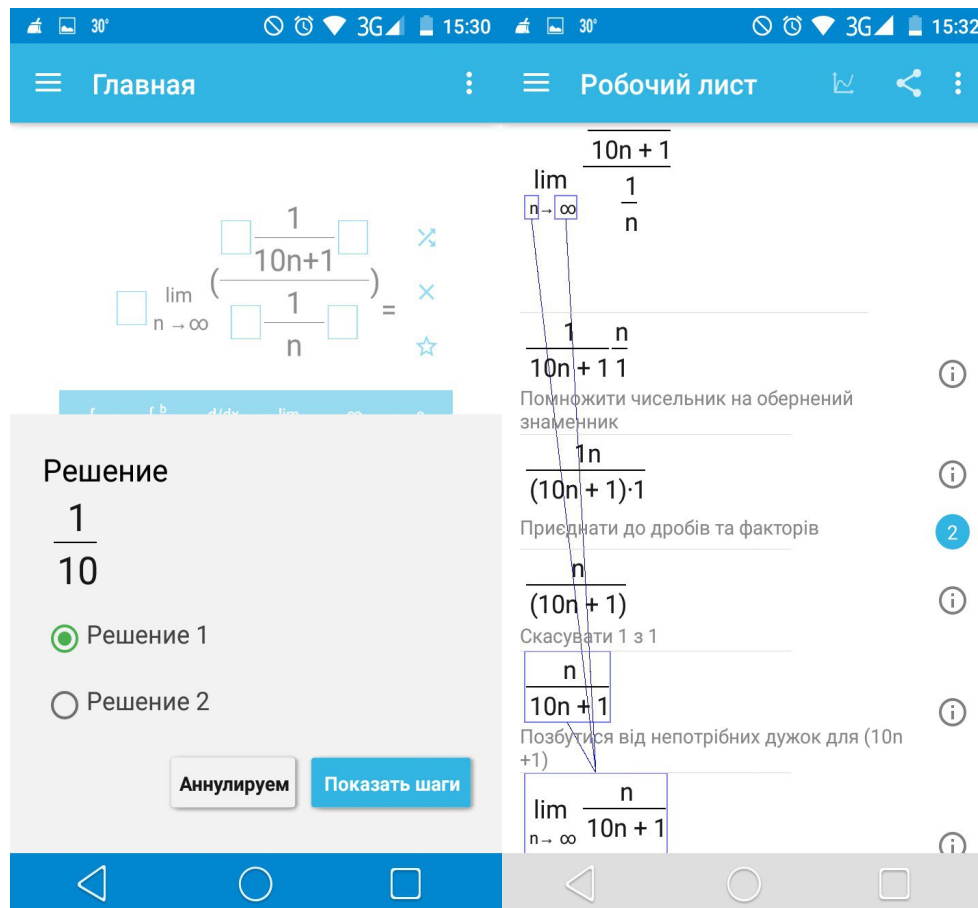


Рис. 11. Короткий (зліва) та детальний (справа) розв'язок задачі в додатку MalMath

Наведені вище приклади – лише невелика частина того, як можна застосовувати ІКТ при вирішенні різноманітних задач математичного аналізу, але головне – розуміти, що всі можливі ІКТ – це лише засоби, а не метод вирішення проблеми.

Упродовж нашого досліджування постійно здійснювались анкетування, тестування, бесіди з викладачами та студентами. Так анкетування викладачів математичних дисциплін показало, що 60% з них віддають перевагу традиційній формі навчання без залучення засобів ІКТ. Причинами цього є: 1) недостатня методична готовність до застосування ІКТ у навчальному процесі; 2) острах того, що студенти будуть зловживати використанням ІКТ під час розв'язування індивідуальних розрахункових завдань чи виконанні контрольних робіт. Опитування студентів показало, що характерним для більшості студентів є позитивне ставлення до математичного аналізу, яке кількісно зростало в процесі його вивчення, незважаючи на значне ускладнення теоретичного матеріалу: I курс – 56,5%, II курс – 63%, III курс – 67,2%. Основним чинником, який вплинув на зміну ставлення студентів до вивчення математичного аналізу, є активне використання ІКТ при вивченні даної дисципліни.

Також у процесі експерименту було виділено ряд психолого-педагогічних проблем при застосуванні ІКТ у навчанні. Зокрема використання таких засобів сприяє формуванню в студентів уміння навчатись самостійно, високого рівня самоорганізації та самоконтролю; виявляє неможливість для викладача визначити рівень самостійності студентів при виконанні ними індивідуальних домашніх робіт, тому виникає питання ефективних підходів до перевірки знань; технологічні проблеми, які можуть виникати на заняттях чи вдома через застарілість техніки, відсутність мережі Інтернет чи недостатню його швидкість тощо.

4. ВИСНОВКИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У процесі дослідження було визначено проблеми впровадження ІКТ при вивченні математичного аналізу, а також запропоновано шляхи їх подолання. До таких проблем належать: наявність відповідного програмного забезпечення; відсутність у студентів сформованих навичок використання ІКТ у навчальних цілях; невідповідність педагогів до широкого впровадження ІКТ у навчальний процес; відсутність достатньої кількості методичної та навчальної літератури.

На практичних прикладах розкрито методичний підхід до викладання математичного аналізу, який орієнтований на використання ІКТ; досліджено ефективність впровадження такого методичного підходу до навчання математичного аналізу; описано функціональні можливості використання різноманітних ІКТ для підвищення ефективності засвоєння навчального матеріалу. Реалізація описаного методичного підходу передбачає здійснення міжпредметних зв'язків математики й інформатики.

Під час дослідження були використані традиційні форми роботи зі студентами – лекційні та практичні заняття, лабораторні роботи, осучаснені такими засобами навчання, як онлайн та офлайн версія програми GeoGebra, математичний пакет Maple, онлайн-сервіси Wolfram Alpha та ін., мобільний додаток MalMath.

Досвід використання ІКТ у процесі вивчення математичного аналізу дає позитивні результати. Узагальнюючи його, можемо зробити висновки:

- ІКТ можуть замінити ряд традиційних засобів навчання, що використовуються для посилення наочності; використання ІКТ у процесі вивчення математичного аналізу дозволяє активізувати пізнавальну активність студентів; підвищити ефективність навчального процесу.
- Застосовуючи ІКТ на заняттях з математичного аналізу, викладач досягає реалізації таких цілей навчання: розвиток пізнавальних потреб, розвиток навичок та вмінь в експериментально-дослідницькій діяльності, розвиток системного мислення; збільшення ефективності засвоєння навчального матеріалу дисципліни та його об'єму; формування інформаційної культури та компетентності, підвищення ефективності самоосвіти студентів.
- Окрім того відбувається тісне знайомство студентів із вказаним програмним забезпеченням, яке вони потім з легкістю зможуть використовувати під час написання курсових, дипломних проєктів та кваліфікаційних робіт.

У подальшому планується здійснити порівняльний аналіз існуючих онлайн-сервісів та їх функціональних можливостей для розв'язання задач математичного аналізу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Національна стратегія розвитку освіти в Україні на період до 2021 року (СХВАЛЕНО Указом Президента України від 25 червня 2013 року № 344/2013). [Електронний ресурс]. Доступно: <http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/344/2013>. Дата звернення: Листопад 29, 2018.
- [2] В. І. Ключко, З. В. Бондаренко, *Формування знань майбутніх інженерів з інформаційних технологій розв'язування диференціальних рівнянь: монографія*. Вінниця, Україна: ВНТУ, 2010.
- [3] А. А. Томусяк, В. С. Трохименко, *Математичний аналіз: посібник для випускників фізико-математичних факультетів педагогічних університетів та інститутів*. Вінниця, 1999.
- [4] Ю. В. Триус, «Використання Web-СКМ у навчанні методів оптимізації та дослідження операцій студентів математичних і комп'ютерних спеціальностей», на 4-ій наук.-практ. конф. Інноваційні комп'ютерні технології у вищій школі, Львів, 2012, С. 110-115.

- [5] Г. В. Ткачук, «Особливості впровадження мобільного навчання: перспективи, переваги та недоліки», *Інформаційні технології і засоби навчання*, т. 64, № 2, с.13-22, 2018.
- [6] Ю. В. Ботузова, *Ряди: розробки практичних занять в аспекті використання комп'ютерних, мобільних технологій та Інтернет-ресурсів у вивченні математичного аналізу*. Кіровоград, Україна: Авангард, 2016.
- [7] Ю. В. Ботузова, *Диференціальне числення функції кількох змінних: розробки практичних занять в аспекті використання комп'ютерних, мобільних технологій та Інтернет-ресурсів у вивченні математичного аналізу*. Кіровоград, Україна: Авангард, 2016.
- [8] К. І. Словак, «Інформаційно-комунікаційні технології активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів», *Науковий вісник Донбасу*, №3(15), 2011. [Електронний ресурс]. Доступно: <http://nvd.luguniv.edu.ua/archiv/NN15/11skinds.pdf>. Дата звернення: Листопад 29, 2018.
- [9] Wolfram|Alpha computational intelligence. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://www.wolframalpha.com>. Дата звернення: Листопад 29, 2018.
- [10] Контрольная Работа РУ. Решение задач онлайн. [Електронний ресурс]. Доступно: www.kontrolnaya-rabota.ru. Дата звернення: Листопад 29, 2018.
- [11] Империя чисел- математические утилиты. [Електронний ресурс]. Доступно: <https://ru.numberempire.com>. Дата звернення: Листопад 29, 2018.
- [12] IntegralOFF.NET. Интегралы, производная, дифференциальные уравнения, пределы online. [Електронний ресурс]. Доступно: <http://integraloff.net>. Дата звернення: Листопад 29, 2018.

Матеріал надійшов до редакції 04.08.2018 р.

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СРЕДСТВ ИКТ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Ботузова Юлия Владимировна

кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры математики
Центральноукраинский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко,
г. Кропивницкий, Украина
ORCID ID 0000-0002-1313-0010
vassalatii@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается вопрос организации процесса изучения математического анализа с использованием ИКТ. Выделяется ряд проблем, которые возникают в процессе внедрения ИКТ при изучении математического анализа, в частности: наличие доступного программного обеспечения; отсутствие надлежащих навыков пользования ИКТ студентами; использование студентами смартфонов не в учебных целях; неподготовленность педагогов к широкому внедрению ИКТ в учебный процесс; отсутствие методической и учебной литературы. Предложен методический подход к преподаванию математического анализа, который предусматривает использование средств ИКТ на лекционных и практических занятиях, в том числе таких, как GeoGebra, математический пакет Maple, Wolfram|Alpha, различные онлайн-калькуляторы, мобильное приложение MalMath. Приведены подробные примеры использования в учебном процессе указанных ИКТ. Продемонстрировано использование на лекционном занятии динамической модели GeoGebra, которая позволяет совершить небольшой учебный эксперимент и проиллюстрировать геометрический смысл теоремы Лагранжа о конечных приростах. На практических занятиях предлагается использовать ИКТ как средство для проверки самостоятельно полученных решений или как средство для выполнения промежуточных вычислений. Также приведены примеры решения задачи на разложение функции в ряд Тейлора с помощью Wolfram|Alpha, различных онлайн-калькуляторов и Maple. Указано на целесообразность использования этих средств с целью выполнения проверки самостоятельно полученных решений. Предлагается также пример использования мобильного приложения MalMath для выполнения промежуточных вычислений в задаче на исследование сходимости знакопеременного ряда. Представлены результаты опроса преподавателей и студентов, который был проведен в процессе исследования. Также выделен ряд психолого-педагогических проблем при применении ИКТ в обучении, в частности: невозможность для преподавателя определить уровень самостоятельности студентов при выполнении ими индивидуальных домашних работ; технологические

проблемы, которые могут возникать на занятиях или дома из-за изношенности техники, отсутствии сети Интернет или недостаточной его скорости и тому подобное.

Ключевые слова: математический анализ; ИКТ; мобильные технологии; онлайн-сервисы; методика преподавания математических дисциплин.

EXPERIENCE OF USING ICT TOOLS FOR TEACHING MATHEMATICAL ANALYSIS TO FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS

Yuliia V. Botuzova

PhD of Pedagogical Sciences, Senior teacher at the Department of Mathematics

Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

ORCID ID 0000-0002-1313-0010

vassalati@gmail.com

Abstract. The article deals with the process of teaching mathematical analysis with the help of information and communication technologies (ICT). There are a number of problems that arise during the implementation of ICT in the process of teaching mathematical analysis, in particular: the lack of free software; the lack of students' proper skills in using ICT; students do not always use their smartphones for educational purposes; teachers' lack of training related to the widespread implementation of ICT in the educational process; the lack of methodological and educational literature. The methodological approach to teaching mathematical analysis, which involves the use of ICT tools at lectures and workshops, such as GeoGebra, Maple, Wolfram|Alpha, various online calculators, MalMath mobile application, is proposed. The detailed examples of their application in the educational process are also given. The article demonstrates the using of a dynamic GeoGebra model at lectures, which, in its turn, allows carrying out a small educational experiment and illustrating the geometric content of Lagrange's Mean value theorem. It is proposed to use ICT at workshops to test independently obtained solutions, or as a means for performing intermediate computations. The examples of solving mathematical problems on the representation of a function as a Taylor series by using Wolfram|Alpha, various online calculators and Maple are also given. The expediency of using these tools for the purpose of performing the verification of independently obtained solutions is indicated. An example of using MalMath mobile application for performing intermediate computations to solve the problem on testing the convergence of the alternating series is also provided. The article presents the results of the survey of teachers and students conducted in the course of the research. There are also a number of psychological and pedagogical problems related to the use of ICT in education, namely: the impossibility for the teacher to determine the level of students' independence when performing their individual homework; technological problems that may arise at classes or at home due to outdated equipment, lack of the Internet or its speed, etc.

Keywords: mathematical analysis; ICT; mobile technologies; online services; methods of teaching mathematical disciplines.

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- [1] National Strategy for the Development of Education in Ukraine until 2021 (approved by Decree of the President of Ukraine dated June 25, 2013 No 344/2013] (2013). [Online]. Available: <http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/344/2013>. Accessed on: 11.29.2018. (in Ukrainian).
- [2] V. I. Klochko, ta Z. V. Bondarenko, *Formation of knowledge of future engineers in information technologies for solving differential equations: monograph*. Vinnitsa, Ukraine: VNTU, 2010. (in Ukrainian).
- [3] A. A. Tomusyak, ta V. S. Troxymenko, *Mathematical analysis*. Vinnitsa, 1999. (in Ukrainian).
- [4] Yu. V. Tryus, «Using of Web-SCM in teaching methods of optimization and researching operations for the students of mathematical and computer specialties», on the 4th sci.-prac. conf. *Innovative Computer Technologies in Higher School*, Lviv, 2012, pp. 110-115. (in Ukrainian).

- [5] H. V. Tkachuk, «Features of implementation of mobile education: perspectives, benefits and shortcomings», *Informatsiini tekhnolohii i zasoby navchannia*, t. 64, no. 2, pp.13-22, 2018. (in Ukrainian).
- [6] Yu. V. Botuzova, *Series: development of practical lessons in the aspect of using computer, mobile technologies and Internet-services in the studing of mathematical analysis*. Kirovohrad, Ukraine: Avanhard, 2016. (in Ukrainian).
- [7] Yu. V. Botuzova, *Differential calculus of the function of several variables: development of practical classes in the aspect of the using computer, mobile technologies and Internet-services in the studying of mathematical analysis*. Kirovohrad, Ukraine: Avanhard, 2016. (in Ukrainian).
- [8] K. I. Slovak, «Information and communication technologies of activating educational and cognitive activity of students», *Naukovyj visnyk Donbasu*, no. 3(15), 2011. [Online]. Available: <http://nvd.luguniv.edu.ua/archiv/NN15/11skinds.pdf>. Accessed on: 11.29.2018. (in Ukrainian).
- [9] Wolfram|Alpha computational intelligence [Online]. Available: <https://www.wolframalpha.com>. Accessed on: 11.29.2018. (in English).
- [10] Test Work RU. Solving problems online. [Online]. Available: www.kontrolnaya-rabota.ru. Accessed on: 11.29.2018. (in Russian).
- [11] Empire of numbers- math utilities. [Online]. Available: <https://ru.numberempire.com>. Accessed on: 11.29.2018. (in Russian).
- [12] IntegraloFF.NET. Integrals, derivative, differential equations, online limits. [Online]. Available: <http://integraloff.net>. Accessed on: 11.29.2018. (in Russian).



This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.