ISSN 2076-8184. Інформаційні технології і засоби навчання. 2011. №1 (21).
Режим доступу до журналу: http://www.journal.iitta.gov.ua

УДК 519.87.004.2

Овсієнко Юлія Іванівна, старший викладач кафедри вищої математики Полтавської державної аграрної академії, м. Полтава, e-mail: ovsienkoyulia@online.ua

Флегантов Леонід Олексійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Полтавської державної аграрної академії, м. Полтава, e-mail: leonid.flegantov@gmail.com

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ НЕЛІНІЙНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТЕХНІКИ

Анотація

Стаття присвячена обґрунтуванню методики формування практичних умінь і навичок розв'язування задач прикладного змісту на відшукання нелінійних емпіричних залежностей методом найменших квадратів за допомогою комп'ютерної техніки під час вивчення дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)» студентами агрономічного факультету.

Розглянуто алгоритм знаходження параметрів нелінійних залежностей (гіперболічної, степеневої, показникової, експоненційної, логістичної) методом найменших квадратів за допомогою комп'ютерної техніки на змістовних прикладах з агробіології.

Стаття містить методичну розробку лабораторно-практичного заняття з навчальної дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)» на відшукання емпіричних залежностей методом найменших квадратів.

Ключові слова: емпірична залежність, математична модель, метод найменших квадратів, лабораторно-практичне заняття, методика вивчення алгоритму, методична розробка, параметри залежностей.

Ця стаття є логічним продовженням публікації авторів, присвяченої методиці вивчення алгоритму побудови математичних моделей (ММ) методом найменших квадратів (МНК) під час вивчення дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)» (ВМ) для спеціальності 6.090101 «Агрономія» у вищих навчальних закладах (ВНЗ) аграрного профілю [4].

Дослідження зв'язку між експериментальними даними у більшості практично важливих випадків зумовлює потребу у використанні нелінійних виробничих функцій. Це пояснюється тим, що взаємодія між ознаками, що характеризують окремі явища і процеси часто має складніший характер, ніж просто лінійні залежності. Характерною особливістю нелінійного зв'язку є те, що рівномірна зміна однієї ознаки супроводжується нерівномірною зміною (збільшенням або зменшенням) значень іншої ознаки.

Нелінійні форми зв'язку притаманні багатьом процесам і явищам у сільському господарстві. Так, процеси росту і розвитку рослин, накопичення ними продуктивної маси, як правило, розвиваються нелінійно. Відомо також, що насичення ґрунтів вологою більше певної норми є однією з причин зниження врожайності сільськогосподарських культур. Цей зв'язок також є нелінійним.

Під час дослідження нелінійних зв'язків, як і вивчення лінійних, принципове значення має вибір форми залежності, тобто рівняння, за допомогою якого найточніше описується наявний зв'язок. Практичні завдання, пов'язані з відшуканням ММ нелінійних емпіричних залежностей (ЕЗ), розв'язуються аналогічно до тих прийомів, що застосовуються для знаходження параметрів лінійного зв'язку.

Метою статті є обґрунтування методики формування практичних умінь і навичок розв'язування задач прикладного змісту на відшукання нелінійних ЕЗ МНК за допомогою комп'ютерної техніки (КТ) у процесі вивчення дисципліни ВМ студентами агрономічного факультету.

Аналіз досліджень. Вивчення питання щодо впровадження КТ під час викладання окремих тем дисципліни «Вища математика» у ВНЗ дає можливість зробити висновки про наявність значної кількості наукових робіт з даної тематики. Так, розробці спеціалізованого програмно-методичного комплексу для навчання вищої математики студентів ВНЗ присвячені праці: М. І. Жалдака, О. А. Кузнєцова, Н. В. Морзе, С. А. Ракова, Ю. С. Рамського, В. Г. Розумовського, О. В. Співаковського, О. К. Філатова та ін. науковців. Питання застосування систем комп'ютерної математики (*DERIVE*, *GRAN*, *Maple*, *MathCAD*, *Mathlab*, *Mathematica* та ін.) та електронних таблиць *MS Office Excel* під час навчання вищої математики студентів нематематичних спеціальностей у ВНЗ розглянуті в роботах Ю А. Галайко, Є. М. Гулеші, Н. В. Ванжі, Т. В. Наконечної, О. В. Нікуліна, Л. І. Новицької, Т. В. Крилової, О. Г. Фомкіної та ін. дослідників. Здебільшог, автори наукових досліджень зосереджують увагу на загальних аспектах впровадження КТ у навчальний процес ВНЗ, їх ефективності, перевагах. Більшість публікацій присвячено методиці використання інформаційних технологій під час вивчення окремих тем курсів, дисциплін. Разом з тим, аналіз методичних особливостей формування практичних умінь і навичок студентів-аграріїв під час розв'язування прикладних фахових математичних задач за допомогою КТ до цього часу недостатньо висвітлений в науковій літературі. **Завдання** цієї **статті** полягає у розробці алгоритму й методики проведення лабораторно-практичного заняття (ЛПЗ) з ВМ у ВНЗ аграрного профілю з використанням редактора електронних таблиць *MS Excel* для визначення параметрів нелінійних ЕЗ МНК на прикладах з агробіології.

У багатьох випадках, алгоритм обчислення параметрів нелінійних виробничих функцій значно спрощується за допомогою прийому *лінеаризації* нелінійних рівнянь регресії. Диференційований підхід передбачає розгляд питань обов'язкового рівня засвоєння навчального матеріалу, формування поняття лінеаризації і відпрацювання навичок знаходження параметрів нелінійних залежностей. Згідно навчальної програми дисципліни ВМ, розширення змісту модуля «МНК» передбачено за рахунок розгляду головного питання поглибленого рівня засвоєння – поняття про лінеаризацію нелінійних залежностей [6], якому доцільно приділити суттєву увагу під час виконання наступної лабораторної роботи (ЛР) з побудови нелінійних ММ.

Метою ЛПЗ є: опрацювати і засвоїти алгоритм знаходження параметрів нелінійних залежностей (гіперболічної, степеневої, показникової, експоненційної, логістичної) МНК за допомогою КТ.

Основні й додаткові завдання ЛПЗ аналогічні до тих, що розглянуті під час розробки методики вивчення алгоритму побудови лінійної й квадратичної ММ МНК [4].

На початку ЛПЗ корисно нагадати студентам, що лінійна залежність є найпростішою ММ, що описує біологічні процеси і явища. Окрім неї, на практиці дуже часто зустрічаються й інші види виробничих функцій. Такий приклад, як залежність урожайності сільськогосподарської культури від глибини зрошення, вже розглядався. Ця залежність описувалась квадратичною функцією. Крім неї, у сільськогосподарських дослідженнях поширені такі види нелінійних залежностей:

гіперболічна $y = \frac{a}{x} + b$, степенева $y = bx^{a}$, показникова $y = ab^{x}$, експоненційна $y = e^{ax+b}$, логістична $y = \frac{N}{1+e^{ax+b}}$ та ін. [5]. Вивчення процедури визначення параметрів таких виробничих функцій передбачено, згідно пропонованої методики, на другому етапі алгоритму відшукання параметрів ЕЗ МНК, і зводиться до таких міркувань: звести нелінійну залежність до ММ, рівнянням якої є лінійна функція ($y = ax + b$), *підстановкою*, *логарифмуванням* або *двома* зазначеними *способами* одночасно. У зв'язку з цим, студентам слід запропонувати самостійно пригадати властивості логарифмів.

Розглянемо методику вивчення алгоритму побудови нелінійних ММ МНК із використанням КТ на прикладах з агробіології.

Завдання 1 *(гіперболічна залежність)*. У досліді вивчалась залежність приросту довжини стебла конюшини червоної Y від вологості ґрунту X . Дослідні дані значень змінних x_i й y_i наведено у таблиці (табл. 1) [2, с. 69]. МНК побудувати ЕЗ Y від X .

Таблиця 1

Таблиця даних залежності приросту довжини стебла конюшини червоної від вологості ґрунту

№ спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вологість ґрунту X , %	25	27	30	32	35	39	43	46	50	55	58	62
Приріст довжини стебла конюшини Y , мм	370	335	280	240	200	150	120	95	70	40	30	10

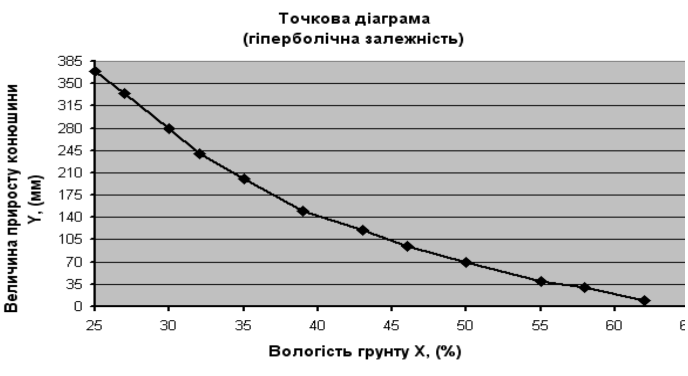
Знайдемо емпіричне рівняння залежності.

І. Підготовчий етап.

1. Запустіть програму *Microsoft Excel* і назвіть робочий аркуш ***"Гіперболічна залежність".*** За дослідними даними створіть на цьому аркуші електронну таблицю, згідно умови задачі (табл. 1) (рис. 1, А).

1	Відшукання параматрів гіперболічної залежності					
2						
3	№ спостере-ження	xi	yi	xi' = 1/ xi	(xi')^2	xi * yi
4	1	25	370	0,04	0,0016	14,8
5	2	27	335	0,03704	0,0014	12,407
6	3	30	280	0,03333	0,0011	9,3333
7	4	32	240	0,03125	0,001	7,5
8	5	35	200	0,02857	0,0008	5,7143
9	6	39	150	0,02564	0,0007	3,8462
10	7	43	120	0,02326	0,0005	2,7907
11	8	46	95	0,02174	0,0005	2,0652
12	9	50	70	0,02	0,0004	1,4
13	10	55	40	0,01818	0,0003	0,7273
14	11	58	30	0,01724	0,0003	0,5172
15	12	62	10	0,01613	0,0003	0,1613
16	**Сума**	**502**	**1940**	**0,31238**	**0,0088**	**61,263**
17	Коефіцієнт кореляції					***-0,970***

А)



Б)

Рис. 1

2. Побудуйте точкову діаграму за дослідними даними (рис. 1, Б).

II. Попередній аналіз.

3. Числове значення коефіцієнта парної лінійної кореляції $r_{xy} \approx -0{,}970$ вказує на сильний від'ємний лінійний кореляційний зв'язок між Y і X, але візуальний аналіз точкової діаграми дає підстави зробити припущення, що більш точно зв'язок між Y і X можна описати гіперболічною, квадратичною, експоненційною або логарифмічною залежністю (рис. 1, Б).

4. Зокрема, аналіз графіка вказує на те, що залежність між x_i й y_i може бути гіперболічною тому, що графік нагадує вітку гіперболи (рис. 1, Б). Отже, як модель оберіть гіперболічну функцію: $y = \dfrac{a}{x} + b$.

5. Обрана модель нелінійна і допускає лінеаризацію. Зведіть її до лінійної моделі підстановкою $x' = \dfrac{1}{x}$. Одержимо: $y = ax' + b$.

III. Застосування МНК. Аналіз моделі й висновки.

6. Для знаходження параметрів a і b обраної моделі, скористайтесь системою нормальних рівнянь (СНР) (1). Отримайте, згідно даних задачі, систему (2):

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i'\right)^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i' = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i' \cdot y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i' + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} 0{,}0088 \cdot a + 0{,}3124 \cdot b = 61{,}263, \\ 0{,}3124 \cdot a + 12 \cdot b = 1940 \end{cases} \quad (2)$$

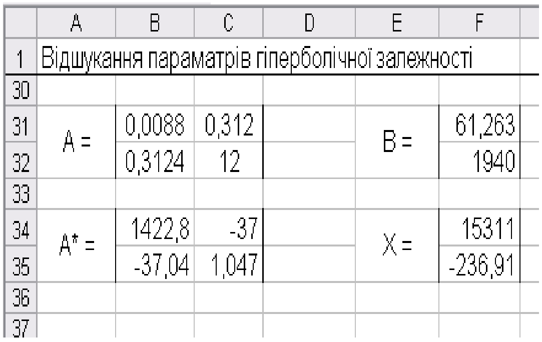
Числові значення параметрів a і b знайдіть за формулами Крамера, обчисливши визначники за допомогою функції: ***=МОПРЕД(…)***. Маєте одержати: $a = 15311{,}3$; $b = -236{,}91$.

7. Побудуйте графік за точками $\left(x_i';\ y_i\right)$. Для контролю обчислень додатково побудуйте лінію тренда і знайдіть коефіцієнт апроксимації R^2, вказавши у вікні ***"Линия тренда"*** тип: ***"Линейная"*** (рис. 2, А).

Слід наголосити студентам, щоб звернули увагу на відповідність значень $a = 15311{,}3$ та $b = -236{,}91$ у рівнянні лінії тренда, раніше обчисленими значеннями параметрів моделі.

Примітка: користуючись можливістю побудови лінії тренда, можна переконатись у справедливості твердження, що залежність між X і Y, у даному випадку можна змоделювати також квадратичною, експоненційною та логарифмічною залежністю. Для цього слід побудувати відповідні лінії тренда для $(x_i;\ y_i)$ і порівняти їх коефіцієнти R^2 з коефіцієнтом R^2 для лінеаризованої гіперболічної моделі (табл. 2). Доречно запропонувати студентам заповнити цю таблицю самостійно.

А)



Б)

Рис. 2

Таблиця 2

Таблиця значень коефіцієнтів апроксимації для різних видів моделей

Модель	Гіперболічна	Квадратична	Логарифмічна	Експоненційна	Лінійна
R^2	0,9991	0,9967	0,984	0,9478	0,9405

Відповідь: ММ, що описує залежність приросту конюшини червоної від вологості ґрунту, має вигляд: $y = \dfrac{15311{,}3}{x} - 236{,}91$.

Зауваження: важливим питанням під час побудови ММ є оцінка області її застосування. У даному випадку область застосування моделі можна оцінити, виходячи з таких міркувань: зі змісту задачі випливає, що $x \geq 0$, але структура ММ допускає лише $x > 0$. Фактично, для побудови моделі розглядається інтервал значень x_i, починаючи з $x = 25$ і далі. Тому, значення $x = 25$ приймаємо за нижню границю інтервалу допустимих значень x. Верхню границю знайдемо з умови $y \geq 0$, яка означає, що приріст довжини стебла конюшини у будь-якому випадку має бути невід'ємним. З цієї умови одержимо: $\dfrac{15311{,}3}{x} - 236{,}91 \geq 0$, $x \leq 64{,}3$.

Отже, можна стверджувати, що дана модель працює у діапазоні значень $x \in [25;\ 64]$.

Окрім розглянутого у прикладі способу знаходження параметрів гіперболічної залежності, шляхом розв'язування СНР методом Крамера, доцільно, для розрахунку параметрів a і b, запропонувати студентам скористатися іншим відомим їм методом розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), зокрема матричним методом. Відповідні *вказівки* щодо виконання обчислень можуть мати такий вигляд:

1. Скласти матрицю A із коефіцієнтів при невідомих СНР ***(B30:C31)***.
2. Скласти матрицю-стовпець вільних членів B ***(F30:F31)***.
3. Знайти обернену матрицю A^{-1} за допомогою функції ***=МОБР(B30:C31)***, натиснувши комбінацію клавіш ***Ctrl+Shift+Enter*** для вставки числових значень елементів оберненої матриці у комірки вибраного діапазону ***(B33:C34)***.
4. Знайдіть розв'язки системи за допомогою функції =***МУМНОЖ(B33:C34; F30:F31)***, натиснувши комбінацію клавіш ***Ctrl+Shift+Enter*** для вставки компонентів вектора розв'язку в комірки вибраного діапазону ***(F33:F34)*** (Рис. 2, Б).
5. Порівняйте числові значення коефіцієнтів a і b, знайдені матричним методом із тими, що обчислені методом Крамера.

Використання різних методів розв'язування СЛАР під час виконання ЛР має на меті повторити і поглибити знання і навички розв'язування СЛАР; продемонструвати зв'язок між різними темами навчальної дисципліни, а також її прикладну спрямованість в цілому. Це сприяє формуванню у студентів позитивної мотивації до вивчення навчальної дисципліни, узагальненню і систематизації знань, демонструє практичну значущість використання математичних методів у майбутній фаховій діяльності.

У ході даної ЛР студенти обов'язково повинні переконатися, що вибір ММ може бути неоднозначним. У будь-якому випадку, з усіх можливих моделей завжди варто обирати найпростішу, за виключенням ситуації, коли слід застосувати загальноприйняті, усталені в науковій літературі й практиці підходи, виробничі функції. Так, у наступному прикладі з усіх можливих варіантів варто обрати степеневу залежність. На цьому треба окремо наголосити студентам.

Завдання 2 *(степенева залежність)*. У досліді вивчалась залежність інтенсивності обміну кисню Y від маси тварини X для птахів і ссавців (табл. 3) [1, с. 56–57]. МНК побудувати ЕЗ Y від X.

Таблиця 3

Таблиця даних залежності інтенсивності обміну кисню за одиницю часу від маси тварини

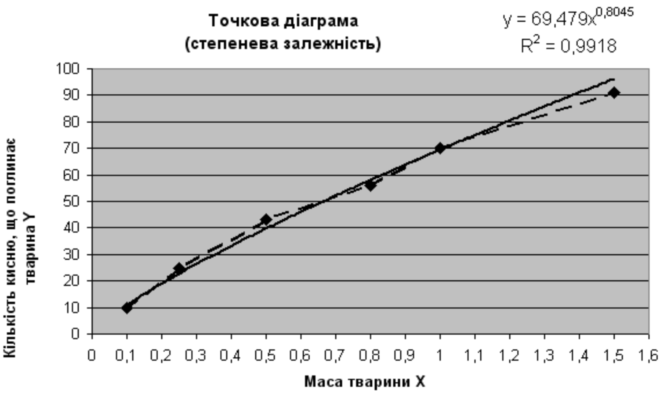
№ спостереження	1	2	3	4	5	6
Маса тварини X	0,1	0,25	0,5	0,8	1	1,5
Кількість кисню, що поглинає тварина Y	10	25	43	56	70	91

Алгоритм виконання завдання.

1. Назвіть вільний робочий аркуш *“**Степенева залежність**”*. За дослідними даними створіть на цьому аркуші електронну таблицю, ввівши відповідні значення x_i і y_i згідно умови (табл. 3) (рис. 3, А).

Відшукання параметрів степеневої залежності

№ спостере-ження	xi	yi	xi' = lg xi	(xi')^2	y'i = lg yi	xi' * yi'
1	0,1	10	-1	1	1	-1
2	0,25	25	-0,602	0,3625	1,3979	-0,8416437
3	0,5	43	-0,301	0,0906	1,6335	-0,491723
4	0,8	56	-0,097	0,0094	1,7482	-0,1694169
5	1	70	0	0	1,8451	0
6	1,5	91	0,176	0,031	1,959	0,3449701
Сума	**4,15**	**295**	**-1,824**	**1,4935**	**9,5837**	**-2,1578136**



А) *Б)*

Рис. 3

2. Побудуйте точкову діаграму для дослідних даних $(x_i;\ y_i)$ (рис. 3, Б).

3. З агробіології відомо, що залежність інтенсивності обміну кисню від маси тварини найбільш точно описується степеневою функцією, тому немає необхідності обчислювати коефіцієнт парної лінійної кореляції.

4. Переконайтесь, що ММ даної залежності дійсно може бути степенева функція: $y = bx^a$, де $y > 0$ і $x > 0$ (виходячи з умови задачі) і $b > 0$.

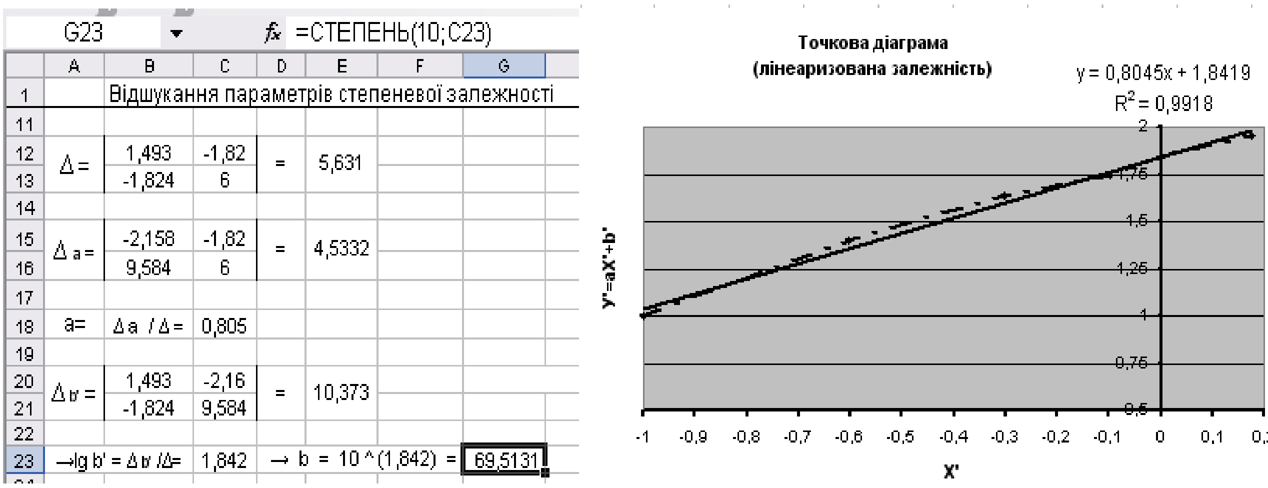
5. Лінеаризуйте степеневу функцію. Для цього: прологарифмуйте ліву й праву частини рівняння, враховуючи властивості логарифмів: $\lg y = \lg b + a \cdot \lg x$. Зведіть модель до лінійної підстановкою: $y' = \lg y$; $b' = \lg b$; $x' = \lg x$. Тоді маємо: $y' = ax' + b'$.

6. Знайдіть параметри a і b' лінеаризованої моделі із СНР (3). Отримайте, згідно даних задачі систему (4).

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i'^2 + b' \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i' = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i' \cdot y_i'), \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i' + n \cdot b' = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i'. \end{cases} \quad (3) \qquad \begin{cases} 1{,}493 \cdot a - 1{,}824 \cdot b' = -2{,}158, \\ -1{,}824 \cdot a + 6 \cdot b' = 9{,}584. \end{cases} \quad (4)$$

7. Обчисліть числові значення параметрів a і b' аналогічно прикладу лінійної залежності за допомогою функції ***=МОПРЕД(…)***. Знайдіть параметр b із співвідношення: $\lg b = b' \Rightarrow b = 10^{b'}$ (рис. 4, А).

8. Для контролю обчислень побудуйте графік за точками $(x_i'; y'_i)$ і додатково побудуйте лінію тренда та знайдіть коефіцієнт апроксимації R^2, вказавши у вікні ***“Линия тренда”*** тип: ***“Линейная”*** (рис. 4, Б).



А) *Б)*

Рис. 4

Відповідь: залежність інтенсивності обміну кисню за одиницю часу від маси тварини (птахи, ссавці) має вигляд: $y = 69{,}479x^{0{,}8045}$.

Як приклад відшукання рівняння експоненційної залежності між дослідними даними можна розглянути таке завдання.

Завдання 3 *(експоненційна залежність).* Відомо, що під часи зберігання сіна його біохімічний склад з часом змінюється. У досліді вивчалась залежність вмісту каротину Y у скошеній люцерні від часу X, (табл. 4) [2, с. 105]. МНК побудувати ЕЗ Y від X.

Таблиця 4

Таблиця даних залежності вмісту каротину у скошеній люцерні через певний проміжок часу

№ спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Час X, год	0	1	2	4	4,5	5	6,5	8	10	11,5
Вміст каротину Y, %	0,25	0,24	0,22	0,19	0,18	0,16	0,15	0,14	0,13	0,12

Алгоритм виконання завдання.

1. Назвіть вільний робочий аркуш *“**Експоненційна залежність**”* і створіть на ньому таблицю з дослідними даними (рис. 5, А).

2. Побудуйте точкову діаграму за дослідними даними (рис. 5, Б).

3. Оберіть експоненційну модель, оскільки відомим є факт, що в агробіології такі залежності, як зміна вмісту каротину або білка у скошеній люцерні з часом найбільш точно описується експоненційною функцією: $y = e^{ax+b}$.

4. Переконайтесь візуально, що точкова діаграма нагадує графік експоненційної функції.

	A	B	C	D	E	F
1	Відшукання параматрів експоненційної залежності					
2	№ спостере-ження	xi	yi	(xi)^2	yi' = lnyi	xi*y'i=xi* lnyi
3	1	0	0,25	0	-1,386	0
4	2	1	0,24	1	-0,62	-0,61979
5	3	2	0,22	4	-0,658	-1,31515
6	4	4	0,19	16	-0,721	-2,88499
7	5	4,5	0,18	20,25	-0,745	-3,35127
8	6	5	0,16	25	-0,796	-3,9794
9	7	6,5	0,15	42,25	-0,824	-5,35541
10	8	8	0,14	64	-0,854	-6,83098
11	9	10	0,13	100	-0,886	-8,86057
12	10	11,5	0,12	132,25	-0,921	-10,5894
13	**Сума**	**52,5**	**1,78**	**404,75**	**-8,41**	**-43,787**

А) *Б)*

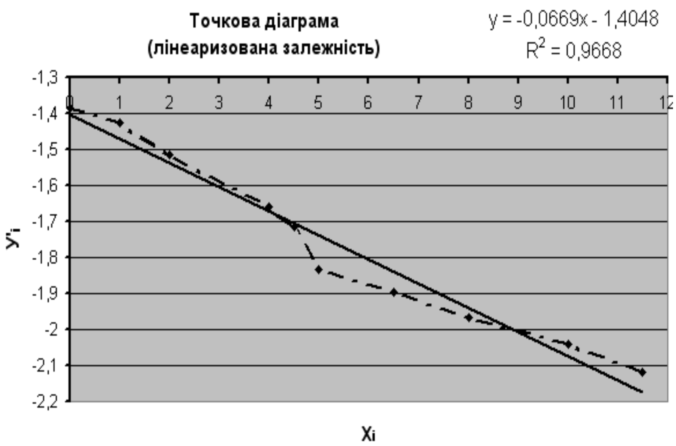
Рис. 5

5. Лінеаризуйте експоненційну модель за допомогою логарифмування: $\ln y = \ln e^{(ax+b)}$. Одержите: $y' = ax + b$, де $y' = \ln y$.

Примітка: зверніть увагу, що у завданні 2 зручним для обчислень є використання десяткового логарифма. Щодо завдання 3, то, оскільки обрана модель є експоненційною, для її лінеаризації раціональним є вибір натурального логарифма.

A28 fx =EXP(B26)

	A	B	C	D	E
1	Відшукання параматрів експоненційної залежності				
15					
16	Δ =	404,75	52,5	=	1291,25
17		52,5	10		
18					
19	Δ a =	-100,82	52,5	=	-86,3654
20		-17,559	10		
21					
22	Δ b =	404,75	-100,8	=	-1813,9
23		52,5	-17,56		
24					
25	a =Δa/Δ =	-0,0668851			
26	b =Δb/Δ =	-1,4047897			
27					
28	0,2454187				



А) *Б)*

Рис. 6

6. Обчисліть параметри a і b, підставивши у СНР (5) відповідні числові значення (рис. 5, А). Згідно умови завдання складіть систему (6).

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i'), \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i'. \end{cases} \quad (5) \qquad \begin{cases} 404{,}75 \cdot a + 52{,}5 \cdot b = -43{,}787, \\ 52{,}5 \cdot a + 10 \cdot b = -8{,}41. \end{cases} \quad (6)$$

Числові значення параметрів a і b обчисліть аналогічно до алгоритму попередніх завдань і звірте результати: $a = -0{,}0669$; $b = -1{,}405$ (рис. 6, А).

7. Для контролю обчислень побудуйте графік за точками $\left(x_i;\ y'_i\right)$. Додатково побудуйте лінію тренда, знайдіть коефіцієнт апроксимації R^2, вказавши у вікні ***"Линия тренда"*** тип: ***"Линейная"*** (рис. 6, Б).

Відповідь: рівняння, що описує залежність вмісту каротину у скошеній люцерні через певний проміжок часу, є: $y = e^{-0{,}06689x-1{,}40478}$ або $y = 0{,}2454e^{-0.0669x}$.

Прикладом розв'язування завдань поглибленого рівня є задача на відшукання параметрів логістичної залежності, яка представляє неабиякий інтерес в агробіології і в загальному випадку описується рівнянням: $y = \dfrac{N}{1+e^{ax+b}}$, де y – ознака, що вивчається, x – час від початку спостереження, N – граничне значення ознаки Y, a і b – параметри рівняння.

Перед початком виконання наступного завдання доцільно нагадати студентам, що логістична залежність спостерігається, зокрема, під час дослідження динаміки об'єму біомаси, а також кількості представників деякої популяції в умовах обмежених ресурсів існування.

Завдання 4 *(логістична залежність.* У досліді вивчалась залежність кількості представників популяції інфузорії туфельки в умовах штучно обмеженого середовища існування (в акваріумі) протягом тижня (табл. 4) [5, с. 212–214]. МНК побудувати ЕЗ Y від X.

Примітка: у даному випадку доцільно розглянути крайові умови, зокрема: на початку спостереження в акваріумі знаходиться 5 представників популяції, тобто $y(0) = 5$, максимальна кількість живих організмів за час спостереження рівна 390, що відповідно до умови задачі має бути досить близьким до граничного значення ознаки Y, яке можна вважати рівним $N = 390 + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Таблиця 5

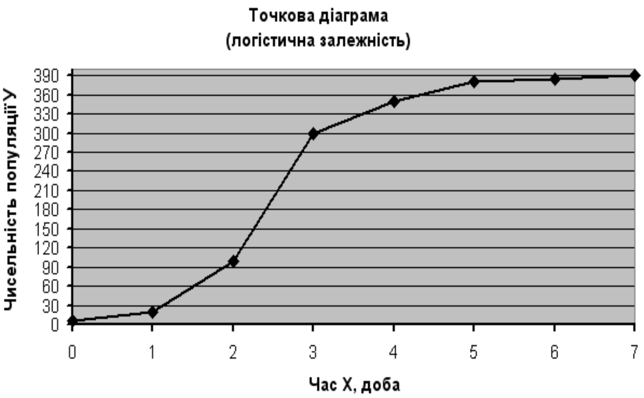
Таблиця даних залежності чисельності представників популяції інфузорії туфельки від часу доби

№ спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8
Час існування популяції X, доба	0	1	2	3	4	5	6	7
Чисельність популяції Y	5	20	100	300	350	380	385	390

Алгоритм виконання завдання.

1. Назвіть вільний робочий аркуш ***“Логістична залежність”***. За дослідними даними створіть на цьому аркуші електронну таблицю, увівши відповідні значення x_i і y_i згідно умови (табл. 5) (рис.7, А).

1	Відшукання параметрів логістичної залежності							
2								
3	№ спосте-реження	xi	yi	(xi)^2	N / yi	(N / yi) - 1	yi'	xi * yi'
4	1	0	5	0	78,2	77,2	1,8876	0
5	2	1	20	1	19,55	18,55	1,2683	1,2683
6	3	2	100	4	3,91	2,91	0,4639	0,9278
7	4	3	300	9	1,303333	0,30333	-0,5181	-1,5542
8	5	4	350	16	1,117143	0,11714	-0,9313	-3,7251
9	6	5	380	25	1,028947	0,02895	-1,5384	-7,692
10	7	6	385	36	1,015584	0,01558	-1,8073	-10,844
11	8	7	390	49	1,002564	0,00256	-2,5911	-18,137
12	**Сума**	**28**	**-**	**140**	**-**	**-**	**-3,766**	**-39,757**



А) *Б)*

Рис. 7

2. Побудуйте точкову діаграму за дослідними даними (рис. 7, Б).

3. Оскільки графік нагадує S-подібну лінію, то можна припустити, що за ММ доцільно обрати логістичну залежність: $y = \dfrac{N}{1 + e^{ax+b}}$.

4. Для лінеаризації моделі виконайте спрощення і перетворення: $y = \dfrac{N}{1 + e^{ax+b}}$;

$e^{ax+b} = \dfrac{N}{y} - 1 \Rightarrow \ln\left(\dfrac{N}{y} - 1\right) = ax + b$.

5. Увівши позначення: $\ln\left(\dfrac{N}{y} - 1\right) = y'$, отримайте лінеаризовану модель: $y' = ax + b$. Врахуйте, що гранична чисельність популяції $N = 390 + \alpha(x)$, тоді $y' = \ln\left(\dfrac{390 + \alpha(x)}{y} - 1\right)$.

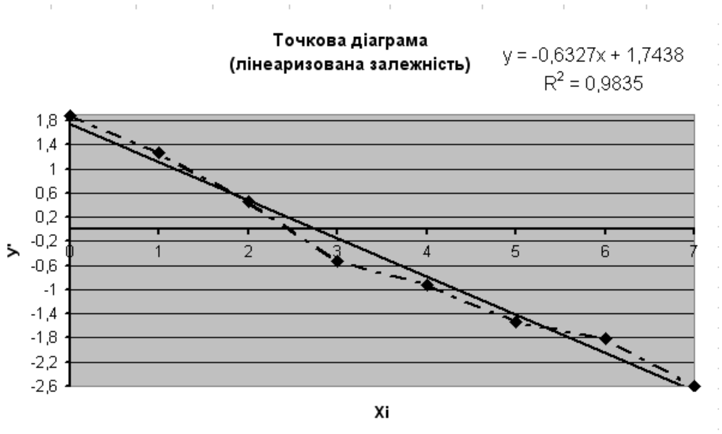
Для зручності обчислень у середовищі електронних таблиць приймемо $\alpha(x) = 1$.

6. Знайдіть параметри a і b лінеаризованої моделі, підставивши відповідно дослідні дані в СНР (7). Отримана система має вигляд (8).

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot y_i'\right), \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ + \ b \cdot n \ = \ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i'. \end{cases} \qquad (7) \qquad\qquad \begin{cases} 140 \cdot a + 28 \cdot b = -39{,}757, \\ 28 \cdot a \ + 8 \cdot b = -3{,}7663. \end{cases} \qquad (8)$$

7. Обчисліть числові значення параметрів a і b аналогічно попереднім прикладам, за допомогою функції ***=МОПРЕД(…)*** (рис. 8, А).

	A	B	C	D	E	F
1		Відшукання параметрів логістичної залежності				
13						
14	Δ =	140	28	=	336	
15		28	8			
16						
17	Δ_a =	-39,757	28	=	-212,5964	
18		-3,7663	8			
19						
20	Δ_b =	140	-39,76	=	585,9038	
21		28	-3,766			
22						
23	a =	-0,6327				
24	b =	1,74376				



А) *Б)*

Рис. 8

8. Для контролю обчислень побудуйте графік за точками $\left(x_i;\ y'_i\right)$. Додатково побудуйте лінію тренда, знайдіть коефіцієнт апроксимації R^2, вказавши у вікні ***"Линия тренда"*** тип: ***"Линейная"*** (рис. 8, Б).

Відповідь: емпіричне рівняння, що описує закономірність росту чисельності популяції інфузорії туфельки у заданих (обмежених) умовах середовища, має вигляд:

$$y = \frac{390 + \alpha(x)}{1 + e^{-0{,}6327x + 1{,}7438}}.$$

Наведені вище матеріали можна використовувати під час аудиторної і самостійної роботи студентів агрономічного факультету для вивчення МНК на різних факультетах повністю, як запропоновано вище, так і з деякими змінами, доповненнями, уточненнями. Доцільно розробити за наведеними зразками 12–15 варіантів завдань для індивідуальної і групової роботи студентів з урахуванням диференційованого підходу, оформити їх у вигляді методичних вказівок і завдань до ЛПЗ у вигляді брошури, електронний варіант якої розмістити на сайті навчального закладу для очної, заочної форми і дистанційного навчання. Впровадження в навчальний процес такої форми практичних занять з ВМ позитивно відобразилось не лише на результатах вивчення саме цього змістового модуля, а й на закріпленні попередніх модулів, узагальненні і систематизації навичок студентів робити теоретичні й практичні висновки за результатами аналізу експериментальних даних. Розроблена методика проведення ЛПЗ з ВМ із використанням КТ забезпечує можливість організації диференційованого вивчення змістового модуля «МНК». Вона орієнтована, як на студентів, які мають достатній рівень математичних знань і вмінь працювати з електронними таблицями *Excel*, так і на тих, хто здатен опанувати навчальний матеріал поглибленого рівня за відведений час.

Список використаних джерел

1. *Баврин И. И.* Высшая математика: учеб. пособие [для студентов хим.-биол. фак. пед. ин-тов] / И. И. Баврин. – М.: Просвещение, 1980. – 384 с.

2. *Зайцев И. А.* Высшая математика: учеб. [для неинж. спец. с.-х. вузов] / И. А. Зайцев. – М.: Высшая шк. 1991. – 400с.

3. *Лакин Г. Ф.* Биометрия: учеб. пособие [для биологич. спец. вузов] / Г. Ф. Лакин. – [3-е изд., перераб. и доп.]. – М.: Высш. школа, 1980. – 293 с.

4. *Овсієнко Ю. І., Флегантов Л. О.* Методика вивчення алгоритму побудови математичних моделей методом найменших квадратів із використанням комп'ютерної техніки / Ю. І. Овсієнко, Л. О. Флегантов // Інформаційні технології і засоби навчання: електронне фахове видання [Електронний ресурс] / Ін-т інформ. технологій і засобів навчання НАПН України, Ун-т менеджменту освіти НАПН України; гол. ред.: В. Ю. Биков. – 2010. – № 4 (18). – Режим доступу: http://www.ime.edu-ua.net/em18/emg.html. – Заголовок з екрана.

5. *Франс Дж.* Математические модели в сельском хозяйстве / Дж. Франс, Дж. Х. М. Торнли; пер. с англ. А. С. Каменского; под. ред. Ф. И. Ерешко. – М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.

6. *Швець В., Флегантов Л., Овсієнко Ю.* Програма навчальної дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)» для підготовки бакалаврів напряму 6.090101 «Агрономія» у вищих навчальних закладах II–IV рівнів акредитації Міністерства аграрної політики України / В. О. Швець, Л. О. Флегантов, Ю. І. Овсієнко. – К.: Аграрна освіта. – 2008. – 30 с.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Овсиенко Юлия Ивановна, старший преподаватель кафедры высшей математики Полтавской государственной аграрной академии, г. Полтава, e-mail: ovsienkoyulia@online.ua
Флегантов Леонид Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Полтавской государственной аграрной академии, г. Полтава, e-mail: leonid.flegantov@gmail.com

Аннотация

В статье обоснована методика формирования практических учений и навыков решения задач прикладного содержания на поиск нелинейных эмпирических зависимостей методом наименьших квадратов с помощью компьютерной техники при изучении дисциплины «Высшая математика (по специальности)» студентами агрономического факультета.

Рассматривается алгоритм нахождения параметров нелинейных зависимостей (гиперболической, степенной, показательной, экспоненциальной, логистической) методом наименьших квадратов с помощью компьютерной техники на содержательных примерах из агробиологии.

Статья содержит методическую разработку лабораторно-практического занятия по дисциплине «Высшая математика (по специальности)» на поиск эмпирических зависимостей методом наименьших квадратов.

Ключевые слова: эмпирическая зависимость, математическая модель, метод наименьших квадратов, лабораторно-практическое занятие, методика изучения алгоритма, методическая разработка, параметры зависимостей.

METHODS OF STUDYING THE ALGORITHM OF NONLINEAR MATHEMATICAL MODELS CONSTRUCTION BY THE METHOD OF LEAST SQUARES USING COMPUTER TECHNIQUE

Ovsienko Y., senior lecturer of the Department of higher mathematics of the Poltava State Agrarian Academy, Poltava, e-mail: ovsienkoyulia@online.ua
Flegantov L., PhD, associate professor of the Department of higher mathematics of the Poltava State Agrarian Academy, Poltava, e-mail: leonid.flegantov@gmail.com

Resume

In this article we ground methods of forming practical abilities and skills for solving applied contents tasks on searching nonlinear empirical correlations by the method of least squares using computer technique when studying discipline “Higher mathematics (by specialty)” by the students of the agricultural faculty.

We examine the algorithm of finding the parameters of nonlinear correlations (hyperbolic, power, exponential, logistic) by the method of least squares with the help of computer technique on substantial examples of agricultural biology.

This article contains methodical elaboration of the laboratory practical lessons on the discipline “Higher mathematics (by specialty)” on searching empirical correlations by the method of least squares.

Keywords: empirical correlation, mathematical model, method of least squares, laboratory practical lesson, methodic for studying the algorithm, methodical elaboration, parameters of correlations.

Матеріал надійшов до редакції 20.01.2011 р.