© Ю.І. Овсієнко, Л.О. Флегантов, 2010
ISSN 2076-8184. Інформаційні технології і засоби навчання. 2010. №4 (18).
Режим доступу до журналу: http://www.ime.edu-ua.net/em.html

УДК 519.87.004.2

Овсієнко Юлія Іванівна, старший викладач кафедри вищої математики Полтавської державної аграрної академії, м. Полтава

Флегантов Леонід Олексійович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Полтавської державної аграрної академії, м. Полтава.

МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТЕХНІКИ

Анотація

Вимоги до математичної складової професійної підготовки майбутніх фахівців агропромислового комплексу зумовлюють необхідність корекції й уточнення практичного компонента деяких змістових модулів навчальної дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)». У статті обґрунтовано необхідність урахування методичних особливостей формування практичних умінь і навичок розв'язання задач прикладного змісту на відшукання емпіричних залежностей і запропоновано методику вивчення алгоритму побудови математичних моделей методом найменших квадратів за допомогою комп'ютерної техніки.

Ключові слова: емпірична залежність, математична модель, метод найменших квадратів, методика вивчення алгоритму, параметри залежностей, система нормальних рівнянь, табличний процесор *MS Excel*.

У вищих навчальних закладах (ВНЗ) аграрного профілю галузевими стандартами підготовки бакалаврів з галузі знань 0901 «Сільське господарство і лісництво» напряму 6.090101 «Агрономія» передбачено вивчення навчальної дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)» (ВМ). Для сучасного фахівця-аграрія математичні методи ― це, перш за все, інструментарій, засіб розв'язання професійних задач. Тому вимоги до математичної складової підготовки майбутніх фахівців агропромислового комплексу зумовлюють необхідність корекції й уточнення практичного компонента деяких змістових модулів навчальної дисципліни ВМ.

Метою статті є обґрунтування необхідності урахування методичних особливостей формування практичних умінь і навичок розв'язання задач прикладного змісту на відшукання емпіричних залежностей методом найменших квадратів (МНК) за допомогою комп'ютерної техніки (КТ) під час вивчення дисципліни ВМ.

Аналіз останніх *досліджень* та *публікацій*, присвячених розгляду питань впровадження КТ під час вивчення ВМ у ВНЗ, свідчить про значну кількість наукових робіт, у яких відображено зв'язки математичної, комп'ютерно-орієнтованої і практичної та фахової складових процесу підготовки фахівців різних спеціальностей. Так, розробці програмного забезпечення навчального процесу вищої школи присвячені роботи В. П. Дьяконова, М. І. Жалдака, В. І. Клочка, С. А. Ракова, С. О. Семерікова, Ю. В. Триуса та ін. науковців. Проблеми активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів нематематичних спеціальностей засобами КТ під час вивчення ВМ розглядаються у працях Т. В. Крилової, Н. С. Мартинової, Т. В. Наконечної, Ю. К. Тараненко, Г. Г. Швачич та ін. дослідників. У переважній більшості публікацій автори досліджень висвітлюють загальні аспекти впровадження КТ у навчальний процес ВНЗ, їх переваги, презентують власні методичні розробки. Разом з тим, методичні особливості формування практичних умінь та навичок студентів-аграріїв під час розв'язування прикладних фахових математичних задач за допомогою КТ до цього часу практично не розглядалися. **Завдання** цієї **статті** полягає у розробці методики та алгоритму проведення лабораторно-практичного заняття (ЛПЗ) з ВМ у ВНЗ аграрного профілю з визначення параметрів емпіричних залежностей МНК на прикладах з агробіології із використанням електронних таблиць *MS Excel*.

Вибір напрямку дослідження зумовлений низкою причин:

- МНК, згідно навчального плану підготовки бакалаврів напряму 6.090101 «Агрономія», використовується під час вивчення навчальної дисципліни «Основи наукових досліджень в агрономії» у змістових модулях «Кореляційний і регресійний аналіз в агрономічних дослідженнях». Щодо навчального плану підготовки магістрів напряму 8.130102 «Агрономія», то математична складова професійної підготовки майбутніх фахівців прослідковується в дисциплінах «Аналіз і моделювання рослинних продуктивних систем» та «Біометрія й організація досліджень», де МНК

застосовується як один із найбільш універсальних і точних методів вирівнювання емпіричних рядів у кореляційно-регресійному аналізі;

- вивчення змістового модуля «МНК» передбачено, відповідно до державного галузевого стандарту в програмі з ВМ [4], в останньому блоці змістових модулів «Алгоритмізація програм з агрономії». Цей факт зумовлює необхідність демонстрації студентам нематематичних спеціальностей можливостей застосування КТ під час засвоєння матеріалу саме цієї теми;
- у виборі інструментарію відшукання параметрів залежностей МНК вирішальну роль відіграв той факт, що використання табличного процесора *Excel* не потребує додаткових інструктажів та витрат на придбання і встановлення спеціальних комп'ютерних програм, оскільки він входить до складу пакету *MS Office*. Результати констатувального експерименту свідчать про збільшення останнім часом кількості студентів першого курсу, які володіють КТ на достатньому рівні й, зокрема, знайомі з особливостями та можливостями роботи редактора електронних таблиць *MS Excel*. Це пояснюється тим, що у програмах з інформатики загальноосвітніх навчальних закладів у розділі «Прикладне програмне забезпечення загального призначення» обов'язковою для вивчення є тема «Табличний процесор» [2].

Доцільність проведення ЛПЗ з теми «МНК» під час вивчення змістового модуля «МНК» дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)» на першому курсі аграрних ВНЗ з використанням КТ зумовлена такими чинниками.

По-перше, це дозволить на практиці ознайомити майбутнього агронома зі специфікою використання математико-статистичних методів для обробки експериментальних даних, організації та проведення польових досліджень, прикладами правильної інтерпретації отриманих результатів.

По-друге, опрацювання матеріалу змістового модуля «МНК» з використанням табличного процесора *Excel* сприяє формуванню у студентів умінь раціонально проводити самостійні експериментальні дослідження в ході виконання курсових і дипломних робіт бакалаврів та магістерських робіт, що є особливо актуальним в умовах різнорівневої підготовки фахівців і важливим з точки зору їх практичної підготовки.

По-третє, усвідомлення професійного спрямування навчального матеріалу сприяє розвитку позитивної мотивації навчальної діяльності студентів.

Згідно діючої типової програми дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)», перелік питань *обов'язкового* рівня засвоєння навчального матеріалу змістового модуля «МНК» є таким: 1) поняття про МНК; 2) побудова лінійної й параболічної залежностей МНК; 3) алгоритм МНК.

Для розширення змісту модуля доцільно розглянути питання *поглибленого* рівня, а саме: поняття про лінеаризацію нелінійних залежностей (ЛНЗ) [4].

Метою ЛПЗ є: опрацювати і засвоїти алгоритм знаходження параметрів лінійної й квадратичної залежності МНК за допомогою КТ; ознайомитись з алгоритмом лінеаризації деяких нелінійних залежностей.

Основні завдання ЛПЗ:

- навчитись використовувати табличний процесор *MS Excel* для створення таблиць експериментальних даних, виконання допоміжних обчислень, необхідних для створення математичних моделей (ММ);
- навчитися будувати графік емпіричної залежності двох змінних y та x в системі прямокутних координат за допомогою *«Мастера диаграмм»*;
- засвоїти методику аналізу одержаного графіка з метою вибору ММ, що найкраще відображає форму зв'язку між змінними y та x;
- навчитися визначати параметри ММ із системи нормальних рівнянь за допомогою *«Мастера функций»*;
- отримати за дослідними даними емпіричне рівняння залежності між змінними величинами y та x;
- навчитися аналізувати одержане рівняння, формулювати змістовні висновки, робити прогнози.

Додаткові завдання ЛПЗ:

- опрацювати прийоми побудови лінії тренда та розрахунку коефіцієнта достовірності апроксимації R^2;
- ознайомитись із прикладами інтерпретації коефіцієнта R^2.

Вивчення теми «МНК» передбачено, згідно програми, одразу ж після змістового модуля «Розв'язування систем лінійних рівнянь». Тому студентам знайомі основні алгоритми і суть методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Крім того, до другого блоку змістових модулів — «Дисперсійний аналіз в

агрономії», включено питання «Кореляція та регресія» і «Відшукання коефіцієнтів парної лінійної кореляції та парної лінійної регресії». Отже, студенти першого курсу напряму підготовки «Агрономія» володіють теоретичним обґрунтуванням МНК і практичними прийомами, необхідними для відшукання параметрів емпіричних залежностей. Викладач має побудувати заняття так, щоб сформувати у студентів практичні вміння знаходити параметри емпіричних залежностей МНК за допомогою КТ, зокрема можливостей табличного процесора *Excel*.

Враховуючи різноманітність типів емпіричних залежностей, які зустрічаються у практиці фахівців-аграріїв, кількість завдань ЛПЗ має бути досить значна. Водночас їх практична реалізація є громіздкою і вимагає великих затрат часу. Тому слід акцентувати увагу студентів на використанні раціональних прийомів роботи з електронними таблицями, наприклад: *«Маркера автозаполнения»*, функцій *«Копировать – Вставить»*, майстра побудови графічних об'єктів *«Мастера диаграмм»*.

Можна запропонувати такий загальний алгоритм виконання практичних завдань відшукання параметрів емпіричних залежностей МНК. Він складається з трьох основних етапів (зірочкою «*» відмічено додаткові завдання поглибленого рівня):

I. Підготовчий етап.

1. Побудувати електронну таблицю з дослідними даними. Для цього:

1) запустити програму *Microsoft Excel*;
2) зберегти у свою робочу папку файл під назвою *МНК. xls*;
3) перейменувати відповідно робочий аркуш;
4) на робочому аркуші створити електронну таблицю, ввівши відповідні значення x_i та y_i.

2. За даними таблиці побудувати точкову діаграму. Для цього:

1) виділити діапазон комірок із дослідними даними;
2) на панелі інструментів натиснути кнопку «*Мастер диаграмм*»;
3) вказати тип діаграми «*Тип: Точечная*» і обрати вигляд «*Вид: Точечная диаграмма, на которой значения соединены отрезками*» (четверта у списку);
4) наступними кроками можна знехтувати, натискаючи кнопки для покрокового переходу «*Далее*»;

5) натиснути кнопку *«Готово»* на останньому кроці *«Мастер диаграмм (шаг 4 из 4): размещение диаграммы»*.

II. Попередній аналіз.

3. Перевірити наявність лінійного кореляційного зв'язку між x та y:

1) розрахувати коефіцієнт лінійної парної кореляції x на y (r_{xy});

2) зробити висновки про наявність та силу лінійного кореляційного зв'язку.

4. Проаналізувати побудовану точкову діаграму та зробити висновки:

1) оцінити характер залежності (лінійна, квадратична або інша), для цього: візуально порівняти точкову діаграму з відомими Вам графіками основних елементарних та виробничих функцій;

2) обрати відповідну ММ.

Зауваження: під час підготовки до ЛПЗ доцільно запропонувати студентам повторити види функцій та їх графіки.

5. Якщо обрана модель нелінійна і допускає лінеаризацію, звести її до лінійної моделі.

III. Застосування МНК. Аналіз моделі та висновки.

6. Розрахувати параметри моделі МНК та записати ММ.

7. *Для контролю правильності виконання обчислень побудувати лінію тренда (також і для лінеаризованої моделі), обчислити коефіцієнт достовірності апроксимації R^2. Для цього:

1) виділити діаграму лівою клавішею миші *(ЛКМ)*;

2) виділити графік емпіричної залежності, натиснувши на ламаній *ЛКМ*;

3) для появи контекстного меню натиснути на графіку діаграми правою клавішею миші *(ПКМ)* й обрати четвертий пункт *«Добавить линию тренда»*;

4) у вікні *«Линия тренда»* вказати відповідний її тип;

5) перейти до вкладки *«Параметры»* і встановити прапорці біля параметрів *«показать уравнение на диаграмме»* та *«поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»*, натиснути кнопку *«ОК»*.

8. *Порівняти параметри моделі, одержані безпосереднім обчисленням за МНК, із параметрами рівняння лінії тренда. Зробити висновок про їх відповідність.

9. Проаналізувати одержану модель та зробити змістовні висновки.

Зауваження: доцільно, щоб інструкції до ЛПЗ були оформлені у вигляді індивідуальних робочих зошитів з тим, щоб під час виконання роботи кожен студент, виконавши черговий пункт алгоритму, обов'язково ставив відмітку (позначку) про його виконання. Це має за мету забезпечити безпомилкове дотримання алгоритму ЛПЗ і краще засвоєння навчального матеріалу.

Запропонована методика вивчення алгоритму побудови ММ МНК із використанням КТ має загальний характер і може бути використана на практиці. За необхідності, нескладно на основі наведених завдань і прикладів їх розв'язання розробити власний лабораторний практикум для студентів різних спеціальностей.

Розглянемо приклади побудови ММ, що можуть бути використані під час аудиторної та самостійної роботи студентів-аграріїв.

Спочатку доцільно розглянути приклад на відшукання параметрів лінійної залежності.

Завдання 1 *(лінійна залежність).* У досліді вивчалась залежність кількості зерен у колосі ячменю Y від довжини колосу X. Дослідні дані значень змінних x_i та y_i наведено у таблиці (таблиця 1) [1, с. 126–127]. МНК побудувати емпіричну залежність Y від X.

Таблиця 1

Таблиця даних залежності кількості зерен ячменю у колосі від довжини

№ спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8
Довжина колоса ячменю X, (см)	7	8	9	10	11	12	13	14
Кількість зерен у колосі Y, (шт)	16,0	20,3	23,5	24,5	28,0	29,0	29,5	31,0

Алгоритм виконання завдань.

I. Підготовчий етап.

1. Побудуємо електронну таблицю:

1) запустіть програму ***Microsoft Excel***;

2) збережіть файл у свою робочу папку під назвою ***МНК. xls***;

3) перейменуйте робочий аркуш ***«Лист 1»*** у ***«Лінійна залежність»***;

4) на аркуші ***«Лінійна залежність»*** створіть електронну таблицю за дослідними даними згідно умови (таблиця 1), увівши до діапазону комірок ***B3:B10*** та ***C3:C10*** відповідні значення x_i та y_i (рис. 1, А).

2. Побудуємо точкову діаграму за допомогою ***«Мастера диаграмм»***:

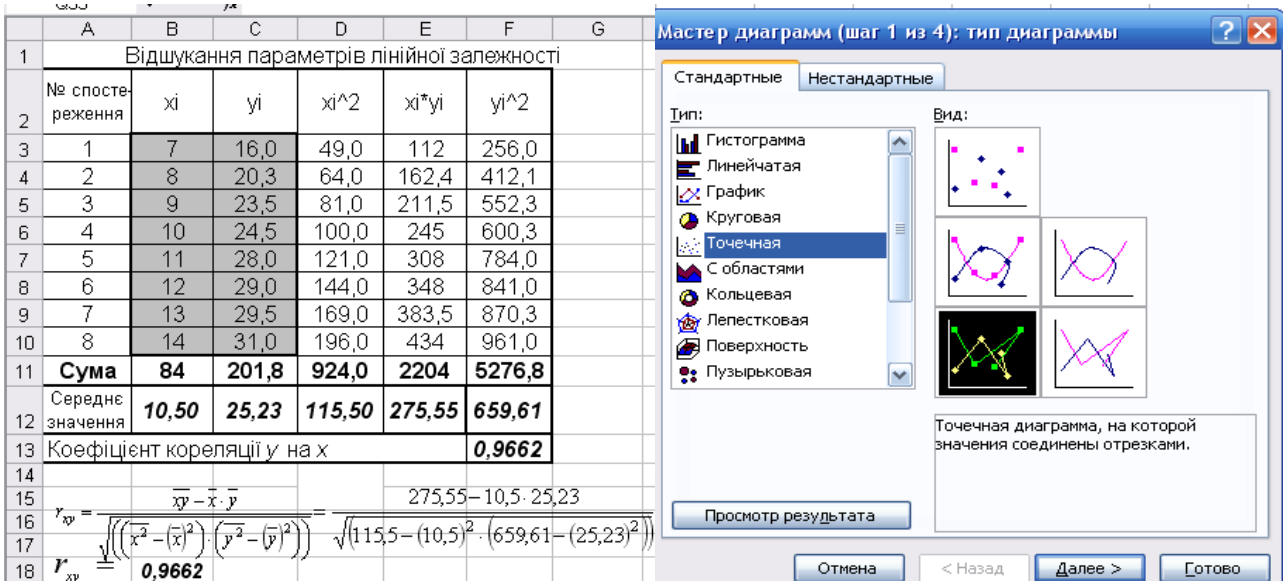
1) виділіть діапазон комірок ***B3:C10*** із дослідними даними;

2) на панелі інструментів натисніть кнопку ***«Мастер диаграмм»***;

3) у вікні ***«Мастер диаграмм»*** на першому кроці вкажіть тип діаграми ***«Тип: Точечная»*** й оберіть вигляд ***«Вид: Точечная диаграмма, на которой значения соединены отрезками»*** (четверта у списку) (рис 1. Б);

4) наступними кроками знехтуйте, натискаючи кнопки для покрокового переходу ***«Далее»***;

5) виконайте останній крок ***«Мастер диаграмм (шаг 4 из 4): размещение диаграммы»,*** натискаючи кнопку ***«Готово»***.



	A	B	C	D	E	F
1	Відшукання параметрів лінійної залежності					
2	№ спостереження	xi	yi	xi^2	xi*yi	yi^2
3	1	7	16,0	49,0	112	256,0
4	2	8	20,3	64,0	162,4	412,1
5	3	9	23,5	81,0	211,5	552,3
6	4	10	24,5	100,0	245	600,3
7	5	11	28,0	121,0	308	784,0
8	6	12	29,0	144,0	348	841,0
9	7	13	29,5	169,0	383,5	870,3
10	8	14	31,0	196,0	434	961,0
11	**Сума**	**84**	**201,8**	**924,0**	**2204**	**5276,8**
12	Середнє значення	***10,50***	***25,23***	***115,50***	***275,55***	***659,61***
13	Коефіцієнт кореляції y на x					***0,9662***
14						
15	$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right) \cdot \left(\overline{y^2} - (\bar{y})^2\right)\right)}}$				$= \frac{275{,}55 - 10{,}5 \cdot 25{,}23}{\sqrt{(115{,}5 - (10{,}5)^2 \cdot (659{,}61 - (25{,}23)^2))}}$	
16						
17						
18	$r_{xy} =$	***0,9662***				

А) *Б)*

Рис. 1

II. Попередній аналіз.

3. Перевіримо наявність лінійного кореляційного зв'язку між Y та X :

1) розрахуємо лінійний коефіцієнт кореляції y на x. Для цього виконайте розрахунки у таблиці так, як зображено на рис. 1, А.

Вказівки: а) для розрахунку значень у рядку **"Сума"** скористайтесь кнопкою ***«Автосумма»*** або функцією ***=СУММ(…)***; б) рядок **«Середнє значення»** обчисліть, розділивши відповідні значення у рядку **"Сума"** на кількість спостережень або за допомогою функції ***=СРЗНАЧ(…)***; в) коефіцієнт кореляції y на x обчисліть за формулою (1):

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\left(\overline{x^2} - (\bar{x})^2\right) \cdot \left(\overline{y^2} - (\bar{y})^2\right)\right)}} \qquad (1)$$

2) числове значення коефіцієнта кореляції $r_{xy} \approx 0{,}97$ вказує на тісний зв'язок між y_i і x_i. Крім того, між досліджуваними ознаками зв'язок є прямим, тобто із збільшенням довжини колоса ячменю збільшується у ньому відповідно й кількість зерен.

Примітка: перевіримо правильність виконання обчислень коефіцієнта кореляції y на x за допомогою функції ***=КОРРЕЛ(B3:B10; C3:C10).***

4. За графіком (рис. 2, А) можна зробити такі висновки:

1) характер залежності – лінійний (експериментальні точки розташовані приблизно вздовж прямої лінії);

2) ММ має вигляд: $y = ax + b$ (лінійна функція).

5. Крок, у якому передбачено лінеаризацію обраної моделі, опускаємо, оскільки модель, що описує емпіричну залежність, ― це лінійна функція.

III. Застосування МНК. Аналіз моделі та висновки.

6. Значення параметрів лінійної залежності знайдемо, підставляючи дані з таблиці (рис. 1, А) у систему нормальних рівнянь (СНР):

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \qquad (2)$$

1) одержимо: $\begin{cases} 924a + 84b = 2204{,}4 \\ 84a + 8b = 201{,}8 \end{cases}$.

2) знайдемо параметри лінійної залежності a та b, розв'язавши СНР методом Крамера:

а) у діапазон комірок ***B19:C20*** введіть значення відповідних коефіцієнтів при змінних a і b даної системи, для обчислення визначника Δ;

б) у комірку ***E19*** введіть формулу: ***=МОПРЕД(B19:C20)***;

в) для знаходження Δ_a і Δ_b виконайте копіювання комірок ***B19:E20*** (наприклад, за допомогою виділення та натиснення комбінації клавіш ***Ctrl+C*** та ***Ctrl+V)***;

г) підставте відповідно стовпець вільних членів у Δ замість першого стовпця в діапазон комірок ***B22:B23*** та обчисліть визначник Δ_a, аналогічно, виконайте заміну другого стовпця ***C25:C26*** й обчисліть визначник Δ_b;

д) за формулами Крамера знайдіть числові значення параметрів a і b: $a = \frac{\Delta_a}{\Delta}$, $b = \frac{\Delta_b}{\Delta}$ (рис. 2, Б).

7. *Для контролю правильності виконання обчислень побудуємо лінію тренда, знайдемо її рівняння і обчислимо коефіцієнт достовірності апроксимації R^2. Для цього:

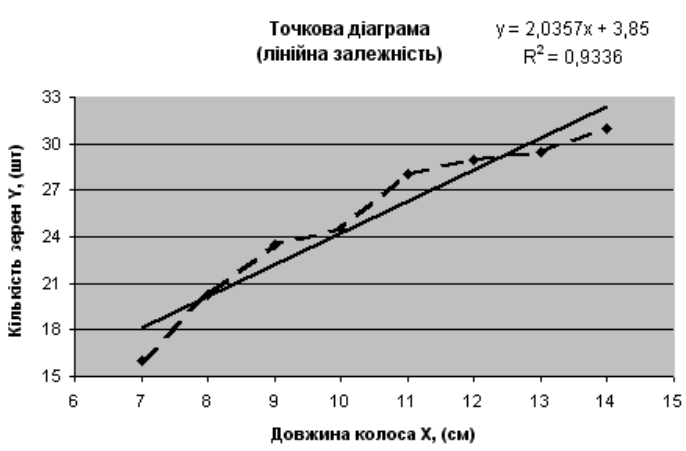
1) виділіть діаграму (рис. 2, А), натиснувши ***ЛКМ***;

2) виділіть графік емпіричної залежності, натиснувши на ламаній ***ЛКМ***;

3) для появи контекстного меню натисніть на графіку діаграми ***ПКМ*** й оберіть пункт ***«Добавить линию тренда»*** натисніть кнопку ***«ОК»***;

4) у вікні ***«Линия тренда»*** вкажіть тип: ***«Линейная»***;

5) перейдіть до вкладки ***«Параметры»*** і встановіть прапорці біля параметрів ***«показать уравнение на диаграмме»*** та ***«поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)»***, натисніть кнопку ***«ОК»*** (рис. 2, А).



19	Δ =	924	84	=	**336**
20		84	8		
21					
22	Δa =	2204	84	=	**684**
23		201,8	8		
24					
25	Δb=	924	2204	=	**1294**
26		84	201,8		
27					
28					
29	a = Δa / Δ = **2,0357**				
30					
31	b = Δb / Δ = **3,85**				

А) *Б)*

Рис. 2

8. *Порівняємо параметри моделі, одержані безпосереднім обчисленням за МНК із параметрами лінії тренда: вони мають співпадати, що свідчить про правильність обчислень.

9. Проаналізуємо одержану модель та зробимо висновки:

1) кількість зерен у колосі зростає із збільшенням довжини колоса, оскільки $a > 0$;

2) із приростом довжини колоса на 1 см кількість зерен зростає в середньому на 2 шт. про що свідчить числове значення параметра $a = 2{,}0357$; параметр b (для нашого прикладу дорівнює 3,85), як вільний член, рівняння має тільки розрахункове значення і не інтерпретується;

3) коефіцієнт достовірності апроксимації дає кількісну оцінку якості емпіричної формули. Значення $R^2 = 0{,}9336$ вказує на те, що одержане рівняння прямої лінії регресії y на x лише на 93% пояснює варіацію кількості зерен у колосі варіацією

довжини колосся ячменю, а 7% обумовлено впливом інших, неврахованих у моделі факторів.

Відповідь: емпіричне рівняння, що виражає залежність між змінними величинами y та x має вигляд: $y = 2{,}0357x + 3{,}85$.

Розв'язавши перше завдання, студент повинен не лише засвоїти алгоритм МНК, вникнути в суть математичних функцій табличного процесора *Excel*, що були використані для відшукання параметрів лінійної залежності, а й на основі отриманих результатів (графічних і числових) вміти пояснити їх зміст з точки зору фахівця даного напрямку підготовки. Тому викладачеві необхідно детально розібрати перший приклад, наголосити на основних етапах розвозку, звернути увагу на очікуваних числових значеннях величин, згідно умови.

Перед тим, як перейти до виконання другого завдання слід нагадати студентам, що в біології зустрічаються не лише лінійні, а й нелінійні зв'язки між варіюючими ознаками. Серед них досить поширеною є квадратична залежність, типовий представник якої — параболічна «лактаційна крива». Отже, наступне завдання полягає у відшуканні параметрів квадратичної залежності, алгоритм розв'язання якого, з деякими уточненнями, зводиться повністю до етапів знаходження параметрів лінійної залежності.

Завдання 2 *(квадратична залежність)*. У досліді вивчалась залежність урожайності сільськогосподарської культури Y від глибини зрошення X. Дослідні дані значень змінних x_i та y_i наведено у таблиці (таблиця 2) [3, с. 175–177]. МНК побудувати емпіричну залежність Y від X.

Таблиця 2

Таблиця даних залежності врожайності сільськогосподарської культури від глибини зрошення

№ спостереження	1	2	3	4	5	6
Глибина зрошення X, (см)	0	10	20	30	40	50
Врожайність Y, (ц / га)	10,4	14	14,7	14,3	13,7	12

Вказівки щодо знаходження МНК параметрів квадратичної залежності:

I. Підготовчий етап.

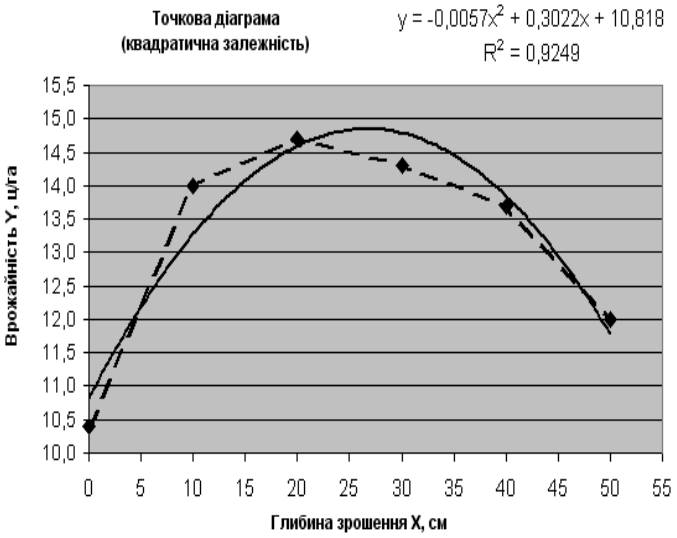
1. Перейменуйте робочий аркуш із ***«Лист 2»*** у ***«Квадратична залежність»*** та за дослідними даними створіть на цьому аркуші електронну таблицю, згідно умови задачі (таблиця 2).

2. Побудуйте точкову діаграму за дослідними даними.

II. Попередній аналіз.

3. Числове значення лінійного коефіцієнта кореляції y на x $r_{xy} \approx 0{,}22$ вказує на слабкий лінійний кореляційний зв'язок між y_i та x_i, але не заперечує можливість існування нелінійного зв'язку між дослідними даними (рис. 3, А).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Відшукання параметрів квадратичної залежності							
2								
3	№ спостереження	xi	yi	xi^4	xi^3	xi^2	xi^2*yi	xi*yi
4	1	0	10,4	0	0	0	0	0
5	2	10	14,0	10000	1000	100	1400	140
6	3	20	14,7	160000	8000	400	5880	294
7	4	30	14,3	810000	27000	900	12870	429
8	5	40	13,7	2560000	64000	1600	21920	548
9	6	50	12,0	6250000	125000	2500	30000	600
10	**сума**	**150**	**79,1**	**9790000**	**225000**	**5500**	**72070**	**2011**
11	Коефіцієнт кореляції						***0,2169***	
12		9790000	225000	5500				
13	Δ =	225000	5500	150	=	3920000000		
14		5500	150	6				
15								
16		72070	225000	5500				
17	Δ_a =	2011	5500	150	=	-22190000		
18		79,1	150	6				
19								
20		9790000	72070	5500				
21	Δ_b =	225000	2011	150	=	1184540000		
22		5500	79,1	6				
23								
24		9790000	225000	72070				
25	Δ_c=	225000	5500	2011	=	42406000000		
26		5500	150	79,1				
27								
28		a =	-0,0057					
29		b =	0,3022					
30		c =	10,818					
31								



А) *Б)*

Рис. 3

4. Аналіз графіка вказує на те, що залежність між x_i й y_i може бути квадратичною тому, що графік нагадує параболу (рис. 3, Б). Отже, у якості моделі обираємо квадратичну функцію: $y = ax^2 + bx + c$.

5. Крок, у якому передбачено лінеаризацію обраної моделі, опускаємо, оскільки для квадратичної залежності він не передбачений.

III. Застосування МНК. Аналіз моделі та висновки.

6. Для знаходження параметрів a, b, c обраної моделі скористаємось СНР (3). Отримаємо, згідно даних задачі систему (4):

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 9790000\,a + 225000\,b + 5500\,c = 72070, \\ 225000a + 5500b + 150c = 2011, \\ 5500a + 150b + 6c = 79{,}1. \end{cases} \quad (4)$$

6.1. Числові значення параметрів a, b і c знайдемо за формулами Крамера аналогічно попередньому прикладу. Для обчислення визначників використаємо функцію*: =**МОПРЕД(діапазон_комірок)*** (рис. 3, А).

7. Для контролю обчислень побудуємо лінію тренда і знайдемо коефіцієнт R^2.

Примітка: у вікні ***«Линия тренда»*** вкажіть тип: ***«Полиномиальная»,*** встановіть прапорець біля параметра ***«Степень: 2»***.

7.1. Для першого прикладу коефіцієнт достовірності апроксимації становить $R^2 = 0{,}9249$ (рис. 3, Б). Це означає, що обрана модель на 92,5% пояснює варіацію врожайності сільськогосподарської культури залежно від глибини зрошення.

8. *Рівняння, одержане безпосереднім обчисленням параметрів квадратичної залежності МНК, і коефіцієнти рівняння лінії тренда співпадають, що є свідченням правильності проведених розрахунків.

9. Аналіз одержаної емпіричної залежності (моделі):

1) параметр $a = -0{,}0057$ характеризує зміну темпу приросту врожайності сільськогосподарської культури Y залежно від глибини зрошення X, а параметр $b = 0{,}3022$ показує початковий темп приросту врожайності залежно від глибини зрошення. Щодо параметра $c = 10{,}818$, то він вказує на початкову врожайність культури за відсутності зрошення;

2) обчислені за одержаною моделлю значення врожайності при глибині зрошення 10 см та 20 см дорівнюють 13,3 ц/га та 14,6 ц/га, а при 30 см та 40 см, відповідно 14,8 ц/га та 13,8 ц/га. Отже, приріст урожайності сільськогосподарської культури при збільшенні глибини зрошення на 10 см залежить від глибини зрошення і становить 1,3 ц/га, у першому випадку, і 1 ц/га у другому. Отже, при різній глибині зрошення темп приросту урожайності різний;

3) глибина зрошення, за якої досягається максимальна врожайність відповідає абсцисі вершини параболи: $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{0{,}3022}{2\cdot(-0{,}0057)} \approx 26{,}51$ (см), причому, максимальна врожайність становить: $y_0 = y(x_0) = -0{,}0057\cdot(26{,}51)^2 + {} + 0{,}3022\cdot 26{,}51 + 10{,}818 \approx 14{,}62$ (ц/га).

Відповідь: залежність врожайності культури від глибини зрошення описується рівнянням: $y = -0{,}0057x^2 + 0{,}3022x + 10{,}818$. Максимальна врожайність становить 14,62 ц/га при глибині зрошення 26,51 см.

Висновки. Запропонована вище методика вивчення алгоритму побудови ММ МНК під час вивчення дисципліни «Вища математики (за фаховим спрямуванням)», у

підготовці майбутніх аграріїв, враховує низку особливостей, зумовлених специфікою даного напрямку підготовки, а саме:

- недостатній рівень базової математичної підготовки студентів-аграріїв;
- необхідність на достатньому рівні ознайомити студентів з великою різноманітністю ММ (виробничих функцій), що використовуються в агробіологічних дослідженнях;
- прикладна спрямованість навчальної дисципліни, націлена на формування фахових практичних вмінь та навичок;
- обмежений час на вивчення навчальної дисципліни в цілому та даної теми зокрема;
- необхідність навчити студентів не тільки будувати ММ, а й аналізувати та давати їх змістовну інтерпретацію;
- акцентований зв'язок зі спеціальністю, з практикою;
- знання, уміння, навички, одержані студентами під час опанування теми «МНК», є ключовими у вивченні низки наступних професійно-орієнтованих дисциплін.

Ефективність застосування запропонованої методики пов'язана із забезпеченістю студентів індивідуальними робочими місцями, наявністю сучасного комп'ютерного обладнання та програмного забезпечення. У цілому, виконання ЛР з використанням ПК має на меті опрацювати і засвоїти алгоритм побудови ММ МНК.

Список використаних джерел

1. *Вольф В. Г.* Статистическая обработка опытных данных / В. Г. Вольф. – М.: Колос, 1966. ― 255 с.

2. Інформатика. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. – Запоріжжя: Прем'єр, 2003. ― 304 с.

3. *Карасёв А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И.* Курс высшей математики для экономических вузов. Ч. II. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование: Учеб. пособие [для студентов вузов] / А. И. Карасёв, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. ― М.: Высш. школа, 1982. ― 320 с.

4. *Швець В., Флегантов Л., Овсієнко Ю.* Програма навчальної дисципліни «Вища математика (за фаховим спрямуванням)» для підготовки бакалаврів напряму 6.090101 «Агрономія» у вищих навчальних закладах II–IV рівнів акредитації

Міністерства аграрної політики України / Швець В. О., Флегантов Л. О., Овсієнко Ю. І. – К.: Аграрна освіта, 2008. ─ 30 с.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

Овсиенко Ю. И., Флегантов Л. А.

Аннотация

Требования к математической составляющей профессиональной подготовки будущих специалистов агропромышленного комплекса вызывают необходимость коррекции и уточнения практического компонента некоторых содержательных модулей учебной дисциплины «Высшая математика (по специальности)». В статье обоснована необходимость учёта методических особенностей формирования практических умений и навыков решения задач прикладного содержания на поиск эмпирических зависимостей и предложена методика изучения алгоритма построения математических моделей методом наименьших квадратов при помощи компьютерной техники.

Ключевые слова: эмпирическая зависимость, математическая модель, метод наименьших квадратов, методика изучения алгоритма, параметры зависимостей, система нормальных уравнений, табличный процессор *Excel*.

METHODS OF STUDYING THE ALGORITHM OF CONSTRUCTION MATHEMATICAL MODELS BY THE METHOD OF LEAST SQUARES USING COMPUTER TECHNIQUE

Ovsienko Y., Flegantov L.

Resume

Requirements for mathematical constituents for professional training of the agroindustrial complex’ future specialists necessitate correction and specification of some substantial modules of educational discipline «Higher mathematics (by specialty)» practical components. In this article we ground necessity of taking into account methodical peculiarity of forming the practical abilities and skills for solving applied contents tasks on searching of empirical correlations, we offer methodic for studying the algorithm of construction mathematical models by the method of least squares using computer technique.

Keywords: empirical correlation, mathematical model, method of least squares, methodic for studying the algorithm, parameters of correlations, system of normal equations, spreadsheet *Excel*.