© О.Б. Красножон, 2010
ISSN 2076-8184. Інформаційні технології і засоби навчання. 2010. №5 (19).
Режим доступу до журналу: http://www.ime.edu-ua.net/em.html

УДК 519.62

Красножон Олексій Борисович, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та обчислювальної математики Бердянського державного педагогічного університету, м. Бердянськ

КОМП'ЮТЕРНА ПІДТРИМКА МЕТОДІВ АДАМСА І РУНГЕ-КУТТА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Анотація

Актуальність матеріалу, викладеного у статті, обумовлена необхідністю розробки, поповнення, оновлення й удосконалення методичних напрацювань з навчальних дисциплін розділу «Обчислювальна математика», викладання яких здійснюється в умовах використання інформаційно-комунікаційних технологій. У статті запропоновано програмні реалізації в середовищі Mathcad методів Рунге-Кутта і Адамса наближеного розв'язування диференціальних рівнянь; наведено приклади на застосування зазначених методів; обґрунтовано доцільність застосування середовища Mathcad у процесі математичної підготовки фахівців. Перспективним напрямом подальших наукових досліджень є методичні, математичні й алгоритмічні аспекти створення ефективних програмних реалізацій чисельних методів у середовищі Mathcad.

Ключові слова: методи Адамса і Рунге-Кутта, наближений розв'язок диференціального рівняння, середовище Mathcad.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Нині в Україні обрано курс на подальший розвиток економіки і підвищення ефективності виробництва за рахунок його інтенсифікації. Однією з передумов реалізації цього курсу є науково-технічний прогрес, в основу якого покладено останні досягнення фундаментальних і прикладних наук. Одним із основних факторів, які сприяють прискоренню науково-технічного прогресу, реалізації комплексних і цільових програм із розв'язання найважливіших науково-технічних проблем, підвищення продуктивності праці, є електронно-обчислювальна техніка або засоби інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Останній термін є більш уживаним і усталеним у сучасній науково-

педагогічній літературі і містить в собі достатній спектр потужних математичних програмних засобів, використання яких забезпечує автоматизацію розв'язування широкого класу математичних задач прикладного характеру. Одним із таких програмних засобів є потужний професійний пакет для математичних обчислень Mathcad.

Бурхливий розвиток обчислювальної техніки обумовлює розширення сфери застосування сучасних розділів математики. Кількісні методи впроваджуються практично в усі сфери діяльності людини. Разом з тим використання комп'ютерної техніки у виробництві та інших сферах господарювання потребує підготовки висококваліфікованих фахівців, які володіють методами обчислювальної математики.

Обчислювальна математика, чисельні методи, методи обчислень, обчислювальні практикуми на ПЕОМ відносяться до основних дисциплін, необхідних для підготовки кваліфікованих фахівців з різних галузей господарювання. Мета вивчення циклу зазначених навчальних дисциплін полягає у забезпеченні засвоєння учнями та студентами теоретичних основ і формування в них навичок для розв'язання різних прикладних задач із застосуванням математичних моделей і чисельних методів, які реалізуються на комп'ютері.

Проте у навчальному процесі закладів середньої та вищої освіти України гостро відчувається нестача підручників та методичних напрацювань з «обчислювальних» дисциплін, викладання яких здійснюється в умовах використання інформаційно-комунікаційних технологій. Відповідні цим умовам методичні системи дістали назву комп'ютерно-орієнтованих. На нашу думку, прискорення підготовки і видання якісних підручників із зазначених дисциплін і запропонування змістовних методичних напрацювань є пріоритетним завданням сучасної вищої математичної освіти. Окреслені вище проблеми і завдання обумовлюють актуальність науково-методичних досліджень, спрямованих на розробку та обґрунтування засад ефективного впровадження засобів ІКТ у навчальний процес.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання даної проблеми, на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття. Розробці комп'ютерно-орієнтованих реалізацій чисельних методів аналізу присвячені окремі підручники, навчальні посібники, публікації в науково-методичних друкованих виданнях,

зокрема, посібник для вчителів [3], навчальні посібники [1, 2, 5], підручник [6], статті [4, 8, 10].

Посібник для вчителів [3] має на меті розкрити деякі аспекти використання засобів сучасних інформаційних технологій під час вивчення алгебри та початків аналізу в середніх навчальних закладах із різними ухилами навчання. У навчальному посібнику [1] подано основи обчислювальної математики і чисельні методи математичного аналізу в обсязі, необхідному техніку-програмісту для роботи на ПЕОМ. Навчальний посібник [2] містить вибрані питання обчислювальної математики відповідно до програми вищих технічних навчальних закладів. Практикум [5] містить докладне розв'язання типових прикладів курсу «Чисельні методи» з реалізацією в системі Mathcad та завдання для самостійної роботи. У підручнику [6] розглянуто чисельні методи алгебри і математичного аналізу, лінійного програмування і статистичної обробки результатів експерименту. Для більшості чисельних методів побудовано алгоритми алгоритмічною мовою Бейсік, які реалізуються на ПЕОМ. Статті [4, 8, 10] присвячені методичним та алгоритмічним аспектам використання комп'ютера у процесі математичної підготовки учнів і студентів у середніх та вищих навчальних закладах.

Поданий вище аналіз останніх публікацій дає підстави для виділення недостатньо досліджених компонентів загальної методичної проблеми в частині створення програмних реалізацій окремих чисельних методів у середовищі Mathcad. Зазначеним методичним компонентам присвячується наша стаття.

Формулювання мети статті (постановка завдання). Стаття має за мету запропонувати програмні реалізації в середовищі Mathcad методів Рунге-Кутта і Адамса наближеного розв'язання диференціальних рівнянь, навести приклади на застосування зазначених методів і привернути увагу педагогів на доцільність застосування зазначених програмних реалізацій у процесі математичної підготовки фахівців як математичних, так і нематематичних спеціальностей, оскільки рівень математичної підготовки студентів з останніх спеціальностей іноді недостатній для усвідомлення теоретичних основ побудови таких наближених методів. Специфіка поєднання у процесі обчислень авторських програмних модулів і вбудованих математичних функцій та процедур середовища Mathcad сприятиме формуванню

алгоритмічної культури студентів, фахова підготовка яких передбачає опанування методами обчислювальної математики.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. Методичні, математичні, алгоритмічні аспекти та передумови ефективного поєднання та взаємодії авторських і вбудованих програмних реалізацій у середовищі Mathcad становлять сутність досліджуваного явища.

Наведемо приклади застосування методів Рунге-Кутта та Адамса для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь. Зазначені методи будуть використані у позначеннях, запропонованих в навчальному посібнику [2].

Приклад 1. З точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ знайти наближене значення $y\big|_{x=1{,}4}$ розв'язку диференціального рівняння $y' + \frac{1}{x} y = e^x$, який задовольняє початкову умову $y = 1$ при $x = 1$. Порівняти отриманий результат із точним розв'язком [7, с. 151].

Розв'язування. Оскільки дане диференціальне рівняння лінійне, то його загальний розв'язок (інтеграл) визначається рівністю:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int e^x \left(e^{\int \frac{dx}{x}} \right) dx \right) = \frac{1}{x} \left(C + xe^x - e^x \right).$$

Використавши початкову умову, отримаємо: $y(1) = C + e - e = C = 1$, отже, частинний розв'язок має вигляд: $y = \frac{1}{x} \left(xe^x - e^x + 1 \right)$. Таким чином, неважко отримати точне значення функції y в точці $x = 1{,}4$: $y(1{,}4) = 1{,}872914$ (обчислення виконуємо з однією запасною цифрою). Але, як відомо, не будь-яке диференціальне рівняння інтегрується в елементарних функція. У таких випадках розв'язування поставленої задачі здійснюється шляхом використання наближених методів. Застосуємо наближені методи до нашого рівняння і порівняємо отримані результати.

Отже, за умовою, $y_0 = y(x_0) = 1$. У нашому випадку формулу Адамса зручно звести до виду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3} \right), \; i = 3,4,\ldots,n-1,$$

де h — крок, обраний відповідно до заданої точності обчислень [2, с. 168–171]. Крок h обираємо із співвідношення $h^4 < 0{,}000005$, $h = 0{,}04$ [1, с. 420]. Зазначений підхід до визначення кроку розбиття відрізка іноді застосовується й у методі Рунге-Кутта [1, с. 412]. Як бачимо з формули Адамса, для початку процесу необхідний так званий *початковий відрізок* y_0, y_1, y_2, y_3, який визначається із початкової умови яким-небудь чисельним методом, наприклад, Рунге-Кутта (рис. 1).

$$f(x,y) := e^{x} - \frac{1}{x}\cdot y \qquad x_0 := 1 \qquad y_0 := 1 \qquad n := 3 \qquad a := x_0$$

$$h := \frac{b-a}{n} \qquad h = 0.04 \qquad k := 0..n-1 \qquad x_k := x_0 + k\cdot h$$

$$yrk := \left|\begin{array}{l} z_0 \leftarrow y_0 \\ \text{for } k \in 0..n-1 \\ \quad \left|\begin{array}{l} k1 \leftarrow h\cdot f\left(x_k, z_k\right) \\ k2 \leftarrow h\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, z_k + \frac{k1}{2}\right) \\ k3 \leftarrow h\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, z_k + \frac{k2}{2}\right) \\ k4 \leftarrow h\cdot f\left(x_k + h, z_k + k3\right) \\ z_{k+1} \leftarrow z_k + \frac{1}{6}\cdot(k1 + 2\cdot k2 + 2\cdot k3 + k4) \end{array}\right. \\ z \end{array}\right.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.04 \\ 1.08 \end{pmatrix} \qquad yrk = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.0703545 \\ 1.14405034 \\ 1.22123438 \end{pmatrix}$$

Рис. 1

Отже, початковий відрізок визначено: $y_0 = 1$; $y_1 = 1{,}0703545$; $y_2 = 1{,}14405034$; $y_3 = 1{,}22123438$. Реалізацію методу Адамса ілюструє рис. 2.

$f(x,y) := e^x - \frac{1}{x}\cdot y \quad x_0 := 1 \quad y_0 := 1 \quad y_1 := 1.0703545 \quad y_2 := 1.14405034 \quad y_3 :=$

$b := 1.4 \quad n := 10 \quad h := \frac{b - x_0}{n} \quad h = 0.04 \quad i := 1..n \quad x_i := x_0 + i\cdot h$

$i := 3..n - 1$

$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{24}\cdot\left(55 f\left(x_i, y_i\right) - 59\cdot f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + 37\cdot f\left(x_{i-2}, y_{i-2}\right) - 9\cdot f\left(x_{i-3}, y_{i-3}\right)\right)$

$y_n = 1.872914$

$g(t) := \frac{1}{t}\cdot\left(t\cdot e^t - e^t + 1\right) \quad R := \left|g(1.4) - y_n\right| \quad R = 6.44261274 \times 10^{-7}$

Рис. 2

Таким чином, $y(1{,}14) = 1{,}872914$, що добре узгоджується з точним значенням. Згідно із значенням *R*, наближений розв'язок містить п'ять правильних десяткових знаків, що свідчить про досягнення заданої точності.

Приклад 2. За допомогою методу Рунге-Кутта знайти наближене значення $y|_{x=1}$ розв'язку диференціального рівняння $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$, який задовольняє початкові умови $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. Порівняти отриманий результат із точним розв'язком [9, с. 318].

Розв'язування. Наведене рівняння за типом є звичайним диференціальним лінійним неоднорідним рівнянням 2-го порядку. Інтегрування даного рівняння у студента-математика труднощів не викликає, оскільки права частина рівняння є функцією спеціального типу. Загальний інтеграл рівняння визначається функцією $y = C_1e^x + C_2xe^x + 3\sin 2x$. З початкових умов отримуємо: $y(0) = C_1 = -2$, $y' = C_1e^x + C_2e^x + C_2xe^x + 6\cos 2x$, $y'(0) = C_2 + 4 = 0$, $C_2 = -4$. Отже, частинний розв'язок, відповідний даним початковим умовам, визначається функцією $y = -2e^x - 4xe^x + 3\sin 2x$. Таким чином, $y(1) = -13{,}58179869$.

Результат застосування методу Рунге-Кутта для обчислення наближеного значення $y(1)$ ілюструє рис. 3.

$$init_vals := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad init_x := 0 \quad final_x := 1 \quad nsteps := 10$$

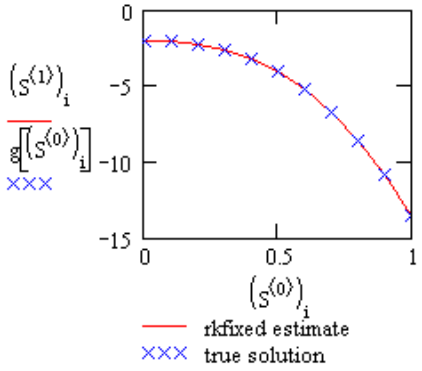
$$D(x,Y) := \begin{pmatrix} Y_1 \\ 2 \cdot Y_1 - Y_0 - 12 \cdot \cos(2 \cdot x) - 9 \cdot \sin(2 \cdot x) \end{pmatrix}$$

$$S := rkfixed(init_vals, init_x, final_x, nsteps, D)$$

$$i := 0 .. nsteps \qquad g(t) := 3 \cdot \sin(2 \cdot t) - 2 \cdot e^{t} - 4t \cdot e^{t} \qquad dg(t) := \frac{d}{dt} g(t)$$

S =

	0	1	2
0	0	-2	0
1	0.1	-2.05639326	-1.19268374
2	0.2	-2.25165344	-2.77914979
3	0.3	-2.62558994	-4.76693283
4	0.4	-3.21845703	-7.15757518
5	0.5	-4.0704146	-9.94788731
6	0.6	-5.22113289	-13.1315643
7	0.7	-6.70957505	-16.70111447
8	0.8	-8.57398589	-20.6500464
9	0.9	-10.85210971	-24.97525291
10	1	-13.58165365	-29.67952583



$$error_function := \max\left(\overrightarrow{\left|S^{\langle 1 \rangle} - g\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)\right|}\right)$$

$$error_function = 1.45 \times 10^{-4}$$

$$error_derivative := \max\left(\overrightarrow{\left|S^{\langle 2 \rangle} - dg\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)\right|}\right)$$

$$error_derivative = 1.735 \times 10^{-4}$$

$$g(0) = -2 \qquad dg(0) = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} g(t) - 2 \cdot \frac{d}{dt} g(t) + g(t) \rightarrow -9 \cdot \sin(2 \cdot t) - 12 \cdot \cos(2 \cdot t)$$

$$g(1) = -13.58179869 \qquad dg(1) = -29.6796993$$

Рис. 3

У якості «бонусу» Mathcad наводить наближені значення першої похідної функції $y(x)$ у точках розбиття. Незважаючи на невелику кількість точок розбиття $(n = nsteps = 10)$, наближені значення самої функції та її першої похідної у точках розбиття мають не менше трьох правильних десяткових знаків, про що свідчать оцінки error_function та error_derivative. Наочну оцінку відхилень наближених значень (rkfixed estimate) функції від значень точного розв'язку (true solution) у точках розбиття ілюструє графік праворуч.

Зрозуміло, що використання вбудованої функції rkfixed розв'язує проблему створення власних програмних реалізацій методу Рунге-Кутта. Однак, вважаємо за доцільне ознайомлення студентів із алгоритмом методу Рунге-Кутта (рис. 1) з метою формування алгоритмічної культури і більш якісного засвоєння його теоретичних основ.

Під час розв'язування прикладних задач досить часто доводиться розглядати функції, первісну яких не можна виразити в елементарних функціях, а також функції,

задані таблично або графічно й аналітичний вираз яких невідомий або аналітичний вираз первісної складний і незручний для обчислень. Відомо, зокрема, що розв'язування диференціального рівняння Ріккаті не зводиться, взагалі кажучи, до квадратур. Як показав Ліувілль (1841 р.), лише в окремих випадках розв'язок спеціального рівняння Ріккаті може бути поданий квадратурами від елементарних функцій. У таких випадках користуються чисельними методами у відповідних комп'ютерних реалізаціях. Деякі з таких реалізацій подані в статті. Створення таких реалізацій і обґрунтування доцільності їх використання ми відносимо до основних результатів нашого дослідження.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Основні висновки дослідження містять такі положення:

- розв'язування задач з використанням математичних програмних засобів формує в студентів педагогічних вищих навчальних закладів широкий спектр алгоритмічних прийомів загального характеру, цінних для математичного розвитку особистості і таких, що можуть бути застосованими і на будь-якому іншому математичному матеріалі;
- наведені в статті комп'ютерні реалізації методів Рунге-Кутта та Адамса наближеного розв'язання диференціальних рівнянь є методичним напрацюванням, корисним для студентів і викладачів педагогічних вищих навчальних закладів;
- систематичне і методично виправдане використання математичних програмних засобів у процесі навчання математичних дисциплін сприятиме розв'язанню проблеми неефективного використання навчального часу шляхом усунення, автоматизації і алгоритмізації виконання рутинних однотипних обчислень студентами під час проведення аудиторних і позааудиторних занять.

На нашу думку, перспективним напрямом подальшого наукового пошуку є розробка багатоваріантних різнорівневих тестових завдань з математичних дисциплін, покликаних забезпечити формування і розвиток уміння студентів педагогічних вищих навчальних закладів розв'язувати задачі з використанням математичних програмних засобів. Кафедрам із фахової математичної підготовки доцільно узгоджувати добір прикладного математичного програмного забезпечення з наявними інформаційними ресурсами кафедр інженерно-технічного напряму підготовки фахівців.

Список використаних джерел

1. Вычислительная математика: Учеб. пособие для техникумов / Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П., Смирнов Г. Л. — М.: Высш. шк., 1985. — 472 с.

2. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Под редакцией Б. П. Демидовича. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. — 400 с.

3. *Жалдак М.* І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. — К.: Техніка, 1997. — 303 с.

4. *Зайцева Т. В.* Комп'ютерні технології на уроках алгебри та початків аналізу // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 1999. — №4. — С. 34–37.

5. *Литвин О. М., Лобанова Л. С.* Практикум з курсів «Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ» і «Чисельні методи» (із застосуванням системи MATHCAD). Навчальний посібник. — Харків: УІПА, 2006. — 153 с.

6. *Лященко М. Я., Головань М. С.* Чисельні методи: Підручник. — К.: Либідь, 1996. — 288 с.

7. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов. — 13-е изд. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 560 с.

8. *Раков С. А., Горох В. П., Осенков К. О.* Навчальні дослідження з використанням пакета динамічної геометрії DG // Математика в школі. — 2005. — №1. — С. 10–14.

9. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; Под общ. ред. А. П. Рябушко. — Мн.: Выш. шк., 1991. — 352 с.

10. *Шавальова В. І.* Використання персонального комп'ютера у процесі вивчення курсу математичного аналізу у вищому педагогічному навчальному закладі //Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2002. — №5. — С. 29–33.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ПОДДЕРЖКА МЕТОДОВ АДАМСА И РУНГЕ-КУТТА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Красножон А. Б.

Аннотация

Актуальность материала, изложенного в статье, обусловлена необходимостью разработки, пополнения, обновления и усовершенствования методических наработок по учебным дисциплинам раздела «Вычислительная математика», преподавание которых осуществляется в условиях использования информационно-коммуникационных технологий. В статье предложены программные реализации в среде Mathcad методов Рунге-Кутта и Адамса приближенного решения дифференциальных уравнений; приведены примеры на применение указанных методов; обоснована целесообразность применения среды Mathcad в процессе математической подготовки специалистов. Перспективным направлением дальнейших научных исследований являются методические, математические и алгоритмические аспекты создания эффективных программных реализаций численных методов в среде Mathcad.

Ключевые слова: методы Адамса и Рунге-Кутта, приближённое решение дифференциального уравнения, среда Mathcad.

COMPUTER SUPPORT OF ADAMS AND RUNGE-KUTT METHODS OF THE APPROACHED DECISION OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Krasnozhon A.

Resume

The urgency of the material stated in the article is caused by necessity of development, updating and improvements of methodical operating time on subject matters of issue "Calculus mathematics" which teaching is carried out in conditions of use of information-communication technologies. In the article the program realizations in Mathcad environment of Adams and Runge-Kutt methods of the approached decision of the differential equations are offered; examples on application of the specified methods are brought; the expediency of application of Mathcad environment during mathematical preparation of experts is proved. Perspective directions of the further scientific researches are methodical, mathematical and algorithmic aspects of creation of effective program realizations of numerical methods in Mathcad environment.

Keywords: Adams and Runge-Kutt methods, approached decision of the differential equation, Mathcad environment.